数字的力量

揭示日常生活中数学的乐趣和威力

Strength in Numbers

Discovering the Joy and Power of Mathematics in Everyday Life



（美）谢尔曼·克·斯坦因 著
严子谦 严 磊 译

吉林人民出版社

数字的力量

揭示日常生活中数学的乐趣和威力



责任编辑/王海利
封面设计/张　迅



ISBN 7—206—03516—7
G·982　定价:14.00元

数字的力量

揭示日常生活中数学的乐趣和威力

(美)谢尔曼·克·斯坦因　著
严子谦　严　磊　译



吉林人民出版社

(吉)新登字 01 号

吉林省版权局著作权合同登记
图字 07－2000－395 号

数字的力量
——揭示日常生活中数学的乐趣和威力

著　　者　［美］谢尔曼·克·斯坦因
译　　者　严子谦　严　磊
责任编辑　王海利　　封面设计　张　迅
责任校对　鲁　人　　版式设计　胡学军

出 版 者　吉林人民出版社
（长春市人民大街 124 号　邮编 130021）
发 行 者　吉林人民出版社
制　　版　吉林人民出版社激光照排中心　0431—5637018
印 刷 者　长春市人民印刷材料厂

开　　本　850×1168　1/32
印　　张　9.25
字　　数　180 千字
版　　次　2000 年 10 月第 1 版
印　　次　2000 年 10 月第 1 次印刷
印　　数　1—5 200 册

标准书号　ISBN 7-206-03516-7/G·982
定　　价　14.00 元

如图书有印装质量问题，请与承印工厂联系

内容介绍

数学中有乐趣和力量吗？本书会对你说：当然有！而且，数学中还有实用性、简捷性……以及妙趣横生。《数字的力量》正是从这几个方面，对我们日常生活中的应用数学，从计算抵押付款到选择信用卡利率，以及解释统计资料，进行了引人入胜的探索。

正如作者谢尔曼·斯坦因所阐释的，数学远不止是“一堆数字的计算过程”，它还是我们借以了解周围世界的基本工具，因而与我们的日常生活密切相关。作者在揭示这种关系的同时，生动地评述了诸如“热数”和“冷数”之类饶有兴趣的概念，以及类似埃及绕绳之谜等诸多难题，使本书极富可读性。

从这样的立场出发，斯坦因批驳了许多谬论，从数学没有新内容的观点到数学需要天赋的概念，同时他也赞赏例如黄金三角形一类的数学

奇观，他还展示了数学常常是解决科学问题的神奇方法，例如生物学可以利用曲线的斜率计算种群的增长。

斯坦因在《数字的力量》中，以其迷人的风格，对数学令人惊异的性质，从其像莫扎特交响乐一样美妙的逻辑，到它在我们生活中的力量和渗透性，为我们展示了新的鉴赏角度。他还使我们了解到，数学也是我们了解周围世界的新式工具。

本书对与我们生活相关的所有数学问题作了富有启发性的介绍，行文深入浅出，稍具中学几何及简单算术基础知识者，都可领略其中的无穷乐趣和启迪性。

致 谢

在本书的手稿经历多次修改时，从各个方面的评论家的意见中受益良多。他们之中有数学教授，有一般人，有初高中学生。我十分感谢他们的帮助，使得这本书能成为广大读者可以接受的读物。

加利福尼亚州戴维斯市埃默森初级中学克里斯·加勒特的初等代数班，和戴维斯高级中学乔安内·莫尔登霍尔的分析班，作为“额外学分”的作业对有关数学的各章进行了评论。学生们发表评论时所表现的洞察力和清晰性，给我留下了深刻的印象。

戴维斯市霍克姆斯初级中学的数学教师帕特·金和赫泽尔·韦德，对有关数学的各章，以及关于工作和改革的那几章，提出了许多建议。

加利福尼亚大学戴维斯分校的数学教授唐·查克里安，罗切斯特大学的数学教授桑福德、西

格尔，和加利福尼亚州立大学圣何塞分校的数学教授莱斯特·朗格，阅读了全部手稿，指出了若干疏忽（甚至引进了一个新的错误说法）。美国数学协会出版部主任唐·阿伯斯，加利福尼亚大学戴维斯分校的数学教授亨利·奥尔德，美国江河学院的数学教授安东尼·巴士洛斯，和特拉华大学的机械工程教授安东尼·韦克斯勒，全都是严肃的评论家，他们迫使我在争议较多的几章中加强我的论辩。加利福尼亚大学戴维斯分校的数学教育教授沙龙·达格戴尔，和加利福尼亚州立大学萨克拉门托分校的数学教授伊赖恩·卡西默梯斯实质性地改进了关于改革的两章。

我的妻子汉娜·斯坦因，往往是在笔写阶段阅读每章的第一人。她的许多建议有助于使这本书更加清晰和有趣，因为她坚持读这本书不应像读一本数学教科书。正如没有语言能够表达对我妻子的感谢一样，没有语言能够充分地表达对她为本书所做贡献的感谢。

因为我想要这本书对那些可能已经长期远离数学，或可能在他们的工作中不用很多数学的读者们成为可接受的，我也请求我的朋友、邻居、亲戚和孩子们阅读了各章。他们的意见迫使我更加辛勤地工作，花费的时间也比我预计的要长，这样就使我自始至终谋求适合读者的需要，而不是半途而废。这些评论者——特德·古尔德，保尔·雅各布斯，珍妮·凯勒，唐·库尼兹，阿勒格雷·西尔伯斯坦，洛里·斯尼德，乔舒亚·斯坦因，和苏姗娜·斯坦因——来自各行各业，例如图书馆工作，小学，中学和大学教学，新闻，法律，海洋生物和公共政策。

加利福尼亚大学戴维斯分校参考阅览室馆员们，使该校图

书馆的几百万册书和几千种期刊随手可得，就像我的起居室内书架上的书一样。我感谢他们：拉斐娜·卡斯特罗，佩特西·英努叶，琳达·肯尼迪，珍妮·金鲍尔，桑德拉·兰普里特，戴维·隆德吉斯特，马西娅·梅斯特，奥普里特莎、波帕，居里·斯特拉特福德，和米歇尔·温特。

我还希望表示我对我的朋友，德语教授罗兰·霍尔曼的感谢，他翻译了莫里兹·康托尔关于埃及人对 3—4—5 直角三角形的可能应用的讨论。

安东尼·巴士洛斯制作了插图，对此我表示深深地感谢。

我希望为了改进本书而有建议的任何人，将那些建议寄给我，信址是

Mathematics Department, University of California at Davis, Davis, CA 95616—8633。(e - mail: stein @ math.ucdavis.edu)

阅读顺序指南

第一篇可以按任何顺序阅读，但第二、三章，第九、十章和第十一、十二、十三章各自构成一个自然的单元。

在第二篇中，建议如何阅读数学语言的第十四章是中心部分。第十八和十九章构成一个单元。第二十五章的一部分要用第十七和二十四章。

在第三篇中，第二十七至三十一章按顺序应在第十八和二十四章之后阅读。第三十二章主要依赖于第十八章。

目 录

第一篇 关于数学

第二篇 从中学到幼儿园

第三篇　越来越接近

第一篇　关于数学

第一章　数学的诸多层面

实际上每个人都能了解数学，欣赏数学，意识到它在现代社会中的作用。更一般地说，我认为，我们不论在数学方面，还是在艺术，木工、烹饪、绘画、唱歌等方面，都只发挥了我们的一小部分潜能。我们过早地止步不前。如果我们愿意探索外部世界和我们自身，我们每个人都能达到一个超乎我们想象的水平。我希望本书会有助于人们探索和熟悉数学世界。

年轻人应该知道，在各行各业中，数学都是一个工具。大约三分之二的高薪工作，都要求超出算术以外的数学，作为一种训练，或作为日常应用。只有十分之一的低薪工作有这样的要求。（这些数字基于第十章的数据。）这种反差表明，在高技术经济中，数学是多么重要。一个人懂得的数学越多，就会有更多的职业之门向他开放。由于数学是这样一个生计问题，所以我用整整一章——第十章——来叙述在诸多行业中需要（或不需要）什么样的数学。（第九章也与此论题有关。）

做父母的鼓励自己的孩子们研习数学是至关重要的。当“专家”们利用数字和计算机来影响决策时，每个人都不应惊慌失措。（第三、四两章会提供一些方法，使你防御这种常见的数字欺诈。）

本书的目的是向非信徒和信徒们同样传播数学的福音。我还希望回到这样一个群体当中，他们或者由于学校中（通常在12岁以前）不愉快的经历对数学产生厌倦，或者干脆远离数学。我也希望，通过介绍一些美妙或有实际重要性的新鲜例子，来加深对数学只有愉快经历的那些人们对数学的喜爱。

数学就像寓言中三个瞎子所描述的一样。一个瞎子摸着大腿说，“它像一棵树”。另一个摸着象鼻子报告说，“它像一条蛇”。第三个瞎子摸着一只象耳朵说，“它像一只蝙蝠”。

数学也是这样。如果你把它了解为一个进行算术运算——求得长度和面积，以及计算成本和利润——的工具，它就是一把锤子，或者一把螺丝刀。如果你认为它是用以描述重力或染色体的几何形状的，你可能便会把它想象成专为物理学和生物学领域而创立的语言。上一堂几何课或微积分课，你或许又会把数学视为发展分析技巧的一种手段，适用于商业、法律或医务之类职业的一种训练科目。最后一种看法就是连锁旅店的创始人康拉德·希尔顿的看法。他在他写的《作我的客人吧》一书中是这样表述的：

> 我不力图使人相信，微积分，或者甚至代数与几何，乃旅馆经营所必需。但我要长期大声疾呼，它们决不是钉在普通教育上的无用装饰物。对我来说，在

任何情况下，迅速系统地阐述问题，把每个问题归结为最为简单明了的形式，是特别有用的。你确实不用代数公式，但是……我发现，为发展这一过程所必须的脑力活动，高等数学是最佳可能的锻炼。……

全面的数学智能的训练，可以防止任何一种趋势被一些不相干的东西搅得模糊不清，或引入歧途。……

希尔顿不是强调数学重要性的唯一商业家。充满传奇色彩的金融学家瓦伦·巴佛特的伙伴查理斯·蒙格尔，1994年在南加利福尼亚大学的一次谈话中，向学商业的学生们建议：

首先是数学。你必须学会数的处理——基本运算。对于复利计算，排列组合的初等数学是大有用场的模型。这只是十分简单的代数，学起来不难。难的是你要做到日常化，几乎每天都用。

在哈佛商学院，把一年级学生结合在一起的竟是决策—树论。他们学习代数，并把它应用于现实生活问题。学生们惊奇地发现，中学代数在生活中是有用的。

触摸这只数学大象，还有许多别的方式。如果你体验到它的某些发现与论证的美妙，你便可把数学视为一种艺术形式，就像音乐或者绘画一样。如果你考虑到它的一些撩人心弦而又未获解答的问题，你甚至可以把它同地球上一片未开发的区域

相比较。所有这些描写都是正确的，但没有一个道出事情的全部。

如果你触摸数学，主要是通过按一天一页的速率安排的一长串枯燥计算，或者是未加解释的一长串没头没脑的公式，你就会有一种最为偏颇的看法。在这种情况下，你可能会把数学视为一种惩罚；当你有权责备你的老师或课本时你就会加以责备。

一门课程的教法肯定会影响孩子的学习好坏。看看这样的一群孩子吧：他们因为法语课不及格就宣布，“我是没有希望了。我就是没有语言天才。”他们完全忽略了他们已经掌握英语。如果这些学生花费一两年的功夫学习法语，他们非常可能学会流利地说法语，甚至好到足以挣一个 A+ 到家。教师给的评分并不能衡量这个孩子，而只是表明在一个特定的教学模式下这个孩子完成得怎么样。在某种意义上，它也是对教师的评估。

在所有课程中，数学可以教得最好，也可以教得最坏。在数学课中，所有卡片都可摆在桌上：没有什么东西必须来自信念或某某权威人物的判断。一切都是有道理的。在一位准备充分的教师指导下，学生可以自己进行实验，自己有所发现，并揭示出许多未被告知的基本原理。这些实验不需要高档设备。铅笔和纸，一个计算器，一把尺子，一根绳子，骰子，以及若干个便士就够了。

学习数学，跟学习物理、生物或历史，是完全不同的。当学习原子结构和细胞分解时，学生必须依据无数物理学家和生物学家的断言。至于历史的研习，我们面对的是：

过去，
隐藏在地层之下，
隐藏在地层之上，
隐藏在历史学家的地层之上。

而在学生和数学概念之间，毋须掺杂任何事物。

数学怎么会教得最坏呢？因为它可以作为一套毫无兴趣或用处的数的计算程序来介绍。随着每一页新的练习，孩子们越来越对它疏远起来。最后，当孩子们听到一种神喻似的宣告，例如“为了除以一个分数，你要上下颠倒而后相乘”，或者“负数乘负数得正数”的时候，这种疏远就达到了极端。（这些不可思议的事情的简单解释，将会在第二十章和第二十五章中见到。）

在美国，一个没有学好数学的人，往往会宣称“我就是没有数学天才”。占统治地位的观点是，数学能力源于基因，任何努力都徒劳无益，就像天生的左撇子或者具有完美的音乐音高一样。在外国，信仰的是，你在数学上下功夫，你就会掌握它。在那里，对待数学实际上像对待木工或游泳一样：实践就有长进。高期望孕育着高业绩。在有的地方，指导原则是，“教，这是第一次”。这就意味着，以后你就不必花费时间去“回顾”上次还有哪些内容没学。

约翰·加尔布雷思关于金钱所写的一些话，同样适用于数学。在下面的全部引文中，直须用“数学”这个词来代替“金钱”这个词。

> 那些谈论金钱，从事金钱数学，并以此为生的人们，靠培养这样一种信念来博得声誉：他们所具有的远见卓识，决非常人所能企及。虽然这有助于职业推销，有利于个人，但这是一种欺诈形式。只要是一个有合理的好奇心，勤奋而聪明的人，对于金钱就没有什么不可理解的。在往下的各页中，也没有什么不好懂的。

生物学家理查德·道金在他的《盲人钟表匠》一书中，这样宽慰读者：

> 重要的问题在于牢记，数学并不可怕。它决不像数学传教士们有时所声言的那样困难。每当我感到恐吓时，我总是回想起西尔范纽斯·汤姆逊《微积分使之容易》一书中的一句名言："一个笨蛋会做的事，另一个也会做。"

第十六章通过解决一个困扰过好多数学家的问题，给读者提供一个机会，看出道金所言不谬。

数学分为在精神上几乎相互对立的两个方面。一方面，它提供了几乎无穷无尽的方法以实施日常计算，这些计算现在往往用计算器，现金出纳机或计算机来完成。另一方面，数学可以提供极精密的语言，使我们能以有条不紊的方式思考复杂的决策，而不是只凭轶事，猜测和雄辩。

我们同数学的关系，就好像我们同高技术文明的许多方面的关系一样。我们可以在许许多多的装置上伸进钥匙，移动游标，旋转转盘，一点也不用去想它们是如何工作的。要是古罗马的居民落到我们这个世界上，首先会感到可怕和迷惑。但经过几个星期的调整后，他们也会伸进钥匙，移动游标，旋转转盘。反之，如果剥掉我们文明社会的装饰物，拿走我们并不了解的装置，我们就会发现，我们和古罗马居民毫无区别。让我们返回到那里，我们也能调整到适应他们的生活方式。

我们对周围世界是如何运转的——特别是数学在我们社会中的作用——掌握得越多，我们就越少受我们所不了解的力量的摆布。我们越是觉得像在家一样随便，我们就会越少觉得像个生人似的，被存在于厨房中，卧室内和车篷下的神秘事物所围绕。

我希望本书能有助于我们跟上美国第二任总统约翰·亚当斯的思想。在1780年，正当欧洲订立了一个和平条约之际，他写信给他的夫人阿比盖尔说：

> 我必须研究政治和战争，我的儿子们才有可能自由地研究数学、哲学、地理学、自然历史、造船学、航行学、商业和农业，以使他们的孩子们有权研究绘画、诗歌、音乐、建筑学、雕塑、织锦和陶瓷。

在这里，亚当斯是谈论数学的实际方面。但是，如果他是现在给阿比盖尔写信，他就会把数学归入艺术类，正如下面几章所表明的那样。

本书分为三篇，各有特点。

第一篇，一般性评论，由或多或少彼此独立的各章组成。这一部分的内容主要有

□ 指出如何防止数的欺诈；

□ 指出计算机的成就与局限；

□ 揭露某些关于数学和数学家的荒诞说法；

□ 略述数学的奇妙应用；

□ 描述各行各业用到的数学；

□ 讨论数学教育的改革。

第二篇，给在学校中常会遇到的一些概念提供新观点。这些概念包括：

□ 几何级数及其应用；

□ 毕达哥拉斯定理；

□ 为了除以一个分数，为什么要将它上下颠倒；

□ π 是什么；

□ 为什么负数乘负数得正数；

□ 怎样画出方程的图形。

第三篇

□ 发展一种寻求某些未知量的方法；

□ 求曲线的变化陡峭度；

□ 指出如何计算由曲线界定的面积；

□ 获得一个圆和所有奇整数之间的特殊联系，从而给我们提供一种计算 π 的方法，而不用画出单个的圆。

第三篇的各章是密切相关的。其与以前某些章的联系，已在阅读顺序指南中指出。

第十六章引导读者自己去发现数学思想，从而感受到探索的激情。但是，在某些数学发现后面的论证，却是如此地富于技巧，以致只有专家才能跟上。像许多知识领域一样，数学也分成许多子学科，以致数学家们本身也读不懂超出自己专业范围的研究论文。

即便如此，我们还是可以熟悉这样一个数学发现，虽然在它后面的推理不得不依赖于使人惊奇的神秘事物。例如，第十五章叙述了一些关于初等算术的令人惊异的深刻事实，但却没有指出它们为什么是对的。我承认，我自己也没有读这些论证，因为它们离我的专业范围太远。我仍然可以欣赏这些发现，正如我可以欣赏其他伟大成就一样，例如爬上珠穆朗玛峰，登上月球，或者画出西斯廷教堂。在大部分篇章中，读者将扮演一个介乎探索者和观众之间的角色：一个积极的伙伴。“数学”这个词，通常我们只是把它看成是一个名词；实际上，它也是一个主动态动词。

任何一个“具有合理的好奇心，勤奋而聪明”的人，只要他会做算术，按照第十四章的建议实行，他就能掌握和欣赏本书的任何一章。在少量的地方，代数初步会是有用的，但不是必须的。

在读完本书之后，你应当对数学在“现实”世界中的重要性有一个较为清晰的观念，有阅读数学语言的能力。此外，我还希望，你会获得关于数学的美妙及其推理的优美的享受。

假如我能推动读者像托马斯·杰斐逊那样看待数学，我的使命就算完成。在 **1811** 年他写给朋友的一封信中，他写道：“由于必须指导孙子的数学课程，我又以巨大的热情重新开始

了数学的研习，它永远是我最喜爱的东西。脑子里没有不确定性；有的只是证明和满足。”这来自于一个这样的人，他把一切知识，理论的和应用的，都归于己有。

第二章 冷数的魔力

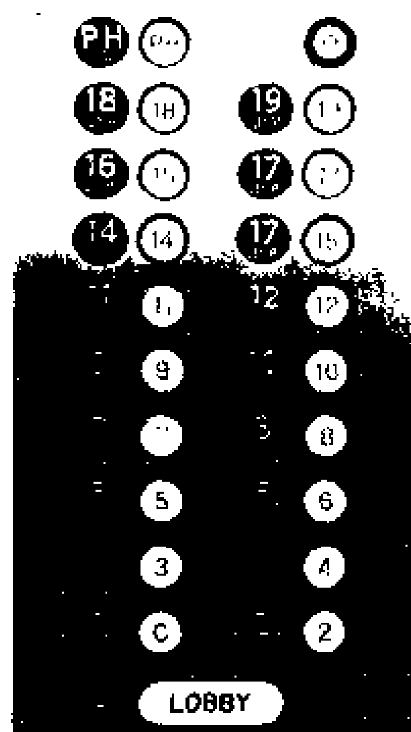
当我听说，光以每秒 186 283 哩的速度传播时，我相信。给我的印象是，每个人都能精确地测量这个速度，但我敢肯定，科学家们不会试图独立地予以检验。这是一个冷数。说“冷”，我是指它不是一个引起严肃争论的话题。虽然没有争议，但如我即将指出的，它可以唤起温暖的感觉。下一章，我将讨论热数，一种在重大决策中起作用而且往往具有弹性的数。那是一些危险的数，我们将指出如何防止它们的潜在不利影响。

一次，当我使用一个现代化的曼哈顿公寓中的电梯时，我注意到控制板上的一个奇怪现象。奇数行突然转换为偶数，14 正好在 11 之上。“怎么回事?”我感到不解。当然，不一会儿就找到了答案：正如控制板的图像所显示的那样，没有编号为 13 的楼层。一个古老的迷信还残存于现代高技术社会之中。

在这个大楼里，没有空缺的楼层。一共是 18 层楼，第 13 层和其它各层看起来也都一样。控制板把顶层编为 19。这个迷信所涉及的是 13 这个数本身，而不是实际的楼层。一个纯粹的数，如此抽象，如此似无争议，如此之“冷”，却弄得唤起一种情感：害怕。

让我们回到1884年，一群纽约人开设了一个第十三俱乐部，其目的是要破除13迷信。他们在每月的13号会餐，桌上放着13，每个月交费13分。他们汇报说，即便如此，他们同任何其他俱乐部的成员一样健康，一样顺利，一样长寿。尽管他们作了努力，13恐惧症还是遗留下来了。

我恰好特别喜欢13这个数。部分由于我想击退13恐惧症，部分由于13是两个平方数之和：13 = 4 + 9。（一个平方数是一整数乘以自身所得。因为9是3×3，所以它是平方数。）



我怎样上13楼！

（唐纳·秉德摄）

但13不是我最喜欢的数。从我还是一个小孩开始，6一直扮演这样的角色。（意即6是作者最喜欢的数——译注。）我想我对6的感情，可以回溯到我对大哥的一只6响老式左轮手枪的兴趣。若干年后，我发现，6曾赢得古希腊数学家的高度尊崇，因为它等于其所有异于自身的因数之和，6 = 1 + 2 + 3。任何一个数，如果它与其所有异于自身的因数之和相同，希腊人便称之为"完全数"。第二个完全数是28，它等于1 + 2 + 4 + 7 + 14。无人知晓，是否存在最大的完全数，也从没有人发现是奇数的完全数。（已知小于1×10^{300}的奇数中没有完全数。）这只是数学家们所不知道的无数"简单"问题中的两个。

最近，我又喜欢上了不被人注意的数3/5。当有人问我我

最喜欢的数时，我回答他们：“3/5”，并且等待他们的反应。典型的反应是，“天哪，你为什么会想到3/5呢?”“哦，1/2和2/3受到广泛关注。而3/5位于两者之间这一点似乎没有人注意到。真令人遗憾，不是吗？此外，3和5都是比较令人愉快的数。”

我提到3/5，不只是要使人们认为它值得欣赏。我的真实目的是要找出人们对分数的感觉。通常，他们没有愉快的记忆。为了发展一种更积极的态度，我在本书中写了第二十章。在短短几页中阐明了，每个人都需要了解这些完全正常的数。

假如我有权赞赏数6，那么我就不会对某些人害怕13感到惊讶。我的赞赏和他们的害怕表明，跟一个词一样，一个数可以引出某些联想和暗示。我将给出一些例子；在这些例子中，一个数已经跳出数的体系，而具有自己的生命力。

半个世纪以前，一哩跑实际上把4这个数变成了一座穿不透的砖墙，就像声屏障似乎构成飞机飞行速度的障碍一样。

1945年，冈德·哈格用4分1.4秒跑完一哩，保持了九年的世界纪录。当时体育界认为，不会有人在4分钟内跑完一哩。这就是为什么当罗杰·班尼斯特在1954年创造3分59.4秒一哩的纪录时，全世界的报刊都以大字标题宣布这一重大突破。四分之一世纪之后，他的成就仍然是可歌可颂的，虽然他只保持了七星期的纪录。他是打破紧箍咒的人。

让我们从一个新的角度来看哈格和班尼斯特的成绩，假想时间是以秒计，而不是以分计。于是，哈格的时间是241.4秒，而班尼斯特则是239.4秒。没有一个人会大事宣扬，说240秒的关卡已被打破，因为240不是一个特别引人注意的数。

但是，我们可以用另外的方式比较他们的纪录。这一次，我们假定，一“秒”要比我们惯用的秒长百分之一。于是，哈格就是用3分59秒跑完一哩。他，而不是班尼斯特，就是第一个冲破神话似的4分关卡的人。班尼斯特便只是纪录簿上的一个脚注，曾经保持纪录的许多赛跑者之一。这就是命运的嘲弄和数的力量。

以一串零结尾的数似乎具有特殊的魔力。当一辆汽车的自动计程仪达到49 999.9时，每个人都会注视所有这些9慢慢地变成0。错过这一时刻是一个小小的损失。当然，以0结尾的数并不比以（例如）37 452结尾的数少。但是，没有一个人会要注视37 451.9变成37 452。

以0结尾的数确实可能影响现实世界的某些事件。例如，在1941年棒球赛季的最后一场之前，特德·威廉姆打了.39955，圆满完成了漂亮的.400。但是，威廉姆不愿意以一个虚假的.400为满足，冒险地坚持要打完最后一场。戏剧性的场面发生了，他以.406告终，成为最后一个达到.400顶峰的选手。

在1995年，当股票市场首次达到4 000点时，股票经纪人认为有责任向他们的顾客解释，“记住，4 000只是一个普通的数。”

在核军备竞赛中，一串零起较重要的作用。1960年，美国拥有68枚导弹，苏联很少，或许只有4枚，当时我们就决定建造1 000枚导弹。为什么是1 000？是五角大楼那些最英明的领导者经过长期的战略考虑之后选取的这个数？绝对不是。

代替1 000，设想一位将军提出10 000，而另一位提出

100。但是，议会决不会拿出 10 000 枚的钱，而 100 看来又太不值一提。

1 000 是什么？它是 10 乘 10 乘 10。为什么是 10？因为我们有 10 个手指。这就是说，如果我们只有 8 个手指，那么将军们就会提出 8 乘 8 乘 8；即只有 512 枚导弹，一个可以节省几十亿美元的要求。（如果我们只有 8 个手指，我们就会只用数字 0，1，2，3，4，5，6，7，而把 8 写成 10，把 8 乘 8 写作 100，根本不需要九和十这两个词。）

甚至海湾战争的持续时间也受一个冷数——另一串零——的影响，正如《纽约时报》报道的如下对话所表明的那样：

> “为什么现在停火？”一位愤怒的将军沃勒问道。
>
> “一百小时是个好兆头”。许瓦兹柯夫将军回答。沃勒哼了一声。

即使一个看起来很复杂的数，完全不同于以一串零结尾的数，也能具有魔力。当我读到美国人口数为 256 437 125 时，我的第一个反应是惊讶于人口普查办公室能达到这样的精确度。然而，沉思一刻之后，我们坚信，这不可能，因为除了别的因素之外，每天有一万左右婴儿出生。事实上，人口普查办公室估计误差占正确数字的百分之二——或者说 500 万。如果它报告说人口大约在 251—261 百万之间，它的头头就可能会被解雇。毕竟，每个州选派到华盛顿的众议院议员的数目是由该州的人口数确定的。这就是为什么宪法要规定每十年进行一次人口普查。为了给人以精确和权威的印象，人口普查办公室

应该避免以一大串零结尾的数。

我只提到了几个数，它们已不是冷漠的抽象观念、有点儿温暖，并且获得了自己的生命力，这生命力是如此之丰富，以致影响到我们的行为。另外一些数是3，7，40和666，但是每个读者可能会发现一些别的数特别引人注意或者使人惊恐。下一章表明，差不多任何一个数都可能突然变成热数或者著名的数，哪怕只是15分钟为人所知。

第三章 热 数

我们在前一页上看到的那些数，并非经常是冷的。它们在较多的争论中被引证。它们是热数。它们的力量部分地来自它们的涵义，因为它们让人想起科学的目标、精确度和逻辑思维。这些数之所以被计算，是因为几十亿美元的投资或法令成为辩论的焦点。它们是辩论术的关键部分。

假如所谓现实世界中的某人在计算一个数时遇到麻烦，那是因为该数使人感兴趣：它可能影响一个决策。没有一个人只是因为好玩而花费时日去找一个数。相反，人们通过提供某个数的方式来支持或赢得争辩。当这一争辩解决之后，这个数就冷下来了。计划用来左右某种观点的数是热数，与冷数正好相反。

一个冷数卷入一场热烈的争论，就能变为热数。例如，1990年纽约市的人口普查数字便由冷变热，当时这个市的官员们抱怨这个数字太低。计数低了（如果出现这种情况）会使

纽约损失几百万美元联邦基金。

如果说一个冷数可能具有魔力，那么一个热数可以把我们击垮，要是我们不加警惕的话。所以，让我们来看看几个热数，以便更好地防止它们对我们的影响。

在争取修建旧金山地铁系统时，一个热数起了重要的作用。1962年，公民们被要求投票赞成历史上最大的一笔市发公债的发行，以支付简称为BART的港湾区域快速交通运输系统。他们被告知说，到1975年，每天将会有258 496位乘车人。这个数是至关紧要的，因为它使人确信，每次运行只要有13美分的利润，就足以补偿全部开支。结果是，在1975年，每天只有乘车人135 000，而这就意味着一次运行损失1.31美元。

那么，258 496这个数字从何而来呢？它出现在顾问们所提供的一篇报告中，这些顾问都是所谓交通运输专家。假如这些专家们预报，“可能会有大约100 000到300 000乘车者，谁知道呢？”这一公债议案就不会通过。（事实上，它是以微弱的多数通过的。）具有六位精确数字的258 496这个数向人暗示，某位专家曾经使用了一个凡人不可能掌握的复杂公式。这种精确性既让人放心，又让人害怕。一个数能给得如此精确，怎么还会不对呢？

这个数到底意味着什么？争取地铁的修建。它服务于它的目的。结果它是错是对，都是无关紧要的。没有人会因为这个数太离谱而打算扒掉地铁铁轨。只有被迫浏览旧报纸的学者，才会费力地加以回顾和核对。数的目的就是赢得战斗，而不是达到真理。在某种意义上说，这样一个预报就像一个笑话，我

们笑了，它就获得了成功。要问它是否真实，那就没抓住要害。

一个数作为一个预报的一部分是特别有效的，这有两个原因。第一，在预报作出的当时很难不予置信；第二，我们敬畏声称能预见未来的人。

一个预报的根据应当是隐蔽的（特别是如果这个预报来自天国或基于预感）。这个数应当用这样一些词组来包装，例如"计算机模型表明"，或"复杂的回归分析揭示"，或"专家发现"，或"这是一个保守的估计"。否则，如果暴露这个数的根据，就会向反对者提供攻击手段，而这个数也就会失去它的魔力。正如我的儿子乔舒亚·斯坦因在一篇题为"不动产谈判艺术"的文章中所建议的那样，"谈判的一方开出的细节越多，另一方就越有机会发现问题。因此，只要有可能，他就应当故弄玄虚。"

要讨论热数，就不可能没有审查，或者简言之，"专家"的作用吧。一个专家被认为知道一般人所不知道的某些事物。因此，专家拥有作出结论的特许，而毋须解释这些结论为什么是真实的。专家们在我们社会中的作用，就像原始部落中巫师的作用一样：他们鼓吹，一场大的投机活动，例如一个巨大的赎罪计划，是切实可行的。而且，随着我们社会的工程日益增大和进一步伸向未来，我们还将不得不给更多的人贴上专家的标签。

我们怎么知道一个人是不是专家？一种方法就是检验专家的论断。比如，容易看出，一个魔术师是不是专家。但是，我们怎么能知道某人是不是地铁系统的专家？我们不得不根据如

下一些次要象征来决定：所获学位，所任职衔，衣着和言辞的风度，所用广告牌和幻灯片的质量。最为有效的次要特征之一就是数的运用。那个数字258 496不仅支撑了BART，而且有助于把顾问等同于一个专家。它服务于最终敲定，和作为谈话制动器。

有一类专家，如气象学家，往往用一个百分比伴随着预报："有30%的可能性下雨。"（研究表明，在这样的预报之后确实下雨的，约占30%。）任何一个提出预报的人应该包括一个百分比才是有意义的。如果是这样，关于BART运输量的预报就应该是"有50%的可能，1975年的日运输量将超过250 000。"在这种形式下，这个预报就会跟天气预报一样平淡无奇。它就不再是一个有说服力的热数。没有人会凭着这样一个软弱无力的论断，去投票赞成10亿美元的公债。

在越南战争期间，为了继续这场战争所说的一个理由是，北越的胜利会导致一场大屠杀，造成500 000牺牲者。战后曾有一场大规模的"重新教育"运动，但没有大屠杀。那么，这个数字是从哪里来的呢？原来，在战争期间，越共在一个小村庄里处死了5个首领。某位先生知道南越的人口数是该村庄的100 000倍，干脆就用100 000去乘5。这个常被引用的数字500 000，在延长战争中起到了它的作用。那个"将有一场大屠杀"的预报几乎没有什么意思。加上这个数就给予它一种力量。这就验证了一条谚语：一个数顶一千句话。

像离巢的鸟一样，这个数500 000脱离它的出处后具有自身的生命力，并变成了一个"事实"。然而，这是热数的本性，它的来源应该笼罩在神秘气氛之中，至少到它所服务的目的达

到为止。

克林顿总统宣称，1994年要压缩1 020亿美元的联邦赤字。虽然听起来这个数容易计算，但它是有争议的。（在一个热数后面往往有一伙对它感兴趣的人，试图把它抬高或压低。热数往往是有弹性的，就像橡皮筋一样。）1994年的赤字是2 030亿美元。你可能会以为，从1993年的赤字减去这个数就是压缩数。事实并非如此。换过来，你应当从这样一个数中减去2 030亿美元；如果不颁布总统的压缩计划，这个数便会是1994年的赤字数。

白宫估计这个假设的数字为3 050亿美元，从而得到压缩数为3 050 – 2 030 = 1 020亿美元。另一方面，国会预算办公室对这个假设的预算用了一个仅为2 860亿美元的估计，从而断定压缩为2 860 – 2 030 = 830亿美元。它甚至还放肆地只把330亿美元归功于总统，而把500亿美元归功于繁荣的经济。然而，因为传统上总统对于在其任内出现的任何事情都享有荣誉（或蒙受指责），克林顿总统也享有这500亿美元的荣誉。

当一个汽车制造商宣布："今年的车型价格比去年的车型只增加2%，低于通货膨胀率"时，也可能出现类似的热数摩擦。比较真实的价钱表明提价8%。怎么会是这样呢？原来，新车是以前一年为标准，而这个标准是可任人选择的。比较是在类似装备的车之间进行。2%这个数字是把新车型同一个从未存在过的假想车型相比较所得到的，就像联邦赤字是同一个假想的赤字比较一样。

甚至教育领域也使好多冷数热了起来。例如，在美国，一年有180学日，而在日本，一年是220学日。因此，为了改善

我们学生的素质，一些教育家建议延长学年。但是，事情并非如此简单。美国的教学时数是 1 003，而日本只是 875。但是，更有甚者。关于时间与学习的国家教育委员会发现，美国学生用于数学，英语，科学和历史等核心课程的时间仅为 41%。到毕业时为止，美国学生用了 1 460 小时来学习这些课程，而日本学生用在核心课程上的时间是 3 170 小时。每一种比较都支持一种不同的改革：加长学年、缩短学日，或者把更多的时间用于核心课程。所希望的结论操纵着所介绍的统计。或许这些数中没有一个反映真实情况。相反，花在家庭作业上的时间可能是一个关键——甚或某些无法计量的事情，例如父母的态度，可能成为关键。

报纸上经常发表一些图表，按各个州用于学校的经费，以每个儿童花费的美元数为衡量标准，将这些州分成不同的等级。我总认为，这只涉及一些冷数：只须用总经费除以儿童数。但是，甚至这些数也能变成热数，它们可被提高或降低，视感兴趣的那伙人是为争取更多的教育经费还是降低税收而定。

首先，开支和儿童没有一致的定义。例如，加利福尼亚就不把用于教育的抽奖活动所提供的基金列入开支。但是，它把有藉口的乌有算作“有”，仅此就对预算有 6% 的影响。某些别的州，为了提高在图表中的等级，把修建通向学校的道路的造价也列入开支。各个州的生活费用的不同更使事情复杂化。再者，如果你看不到事情的真相——所有计算步骤，你就不能肯定这些数的涵义。

1993 年 6 月 22 日的《华尔街杂志》刊载了一个数表，标

题为“金钱无济于事”。这个表列出了每个州每个儿童的平均经费和“SAT等级”（SAT系美国大学入学考试中的学力、智力与性向测验——译注）。花钱最多的10个州排在花钱最少的11个州后面。这听起来似乎是一个强有力的证据，一目了然地表明，为了改善教育，应该减少对学校的投资。这个结论对每个纳税人会很有吸引力。

可惜，还有比我们眼见的为多的事实。霍华德·维纳在一篇题为“在教育上花费的金钱无济于事吗？”的文章中看到了这些数底下的另外一层数，它们没有在表中出现。他们研究了参加SAT考试的学生的百分比。例如，在衣阿华，一个低经费却居最高SAT等级的州，仅有3%的学生参加考试。在康涅狄格，一个高经费却等级很低的州，有78%的学生参加考试。正如维纳所指出的，“如果我们从康涅狄格参加SAT考试者选取前3%，他们的平均分数就会压住现在最高等级的衣阿华。”

显然，在以其表面价值接受一个数时，我们不可能太谨慎。况且，围绕我们的有那么多争论，我们很难探索藏在它们的表面之下的东西。在一个热点问题之中，确切无疑且不容置辩的事实如钻石一样的稀少。即使戴上数的防护钢盔，仍有许多难以解决的问题：这数是如何发现的？这些术语是如何定义的？原始数据是什么？如果有一次民意测验，那么问题是怎么表述的？这数是不是一个独立的研究人员计算出来的，就像在硬科学中的情形一样？

一个男人支持者的团体，想要指出，女人不是惟一的那么坏的人群，宣称“在死囚牢房中，超过一半的女人谋杀了自己的丈夫，但那里仅有三分之一的男人，谋杀了自己的妻子。”

这是对的：实际情况是，七分之四的女人，大约 2 400 男人中的三分之一。这表明，分数是把数隐蔽起来的好地方，否则那些数就平淡无奇。

有时，很难意识到，一个数似冷实热。对那些想让我们确信的数尤其如此。当我们听到一个民意测验结果，并被告知“其误差界限为±3%”时，我们觉得我们了解这个民意测验准确到什么程度。但是，正如路易斯·哈里斯民意测验所的主席汉弗莱·泰勒所告知的，“这是不对的。民意测验的历史充满超过所谓误差界限的‘误差’。”即使这样，新闻广播员还会不断地“保证”可能出现的误差在控制范围之内。这样做的目的是给民意测验涂上一层数学精确性的色彩。

最热的数之一是疾病控制中心（CDC）关于 HIV 病例数的估计。由于保密问题，这个数据是浮动的，估计为 600 000 到 1 200 000。要求增加投资以与艾滋病作斗争的提倡者们，希望 CDC 提高其官方估计。那些曾引进遏制艾滋病传播项目的人们，却想降低这个估计，以证明他们的项目的成功。而且，正如一个专家所注意到的那样，“如此多的人已经在流行病方面投资如此之多，以致任何表明流行病行将消失的迹象，都会在投资者中产生莫名的恐慌。”CDC 处于无赢的两难境地，注定会触犯某个强有力的集团。

为了确信，一个特定的热数，可以上调或下调，你只需心算一下就可以了。不用多久，你就会发现，它是多么地脆弱和富有弹性。虽然一个数乍看起来似乎没法不相信，它可能就是争论中的一个弱点。对热数的最佳防御是坚持查看所由产生的计算中每一个活生生的细节：定义，概述中的问题，假设，数

据。当然，一旦这些细节被暴露于光天化日之下，热数也就随之变冷，失去了说服力，而且可能对任何人都不再有用。

第四章 别把数强加于我

给某事物一个名字，并不向我们保证它的存在。科学家们曾经认为，火是他们称之为“燃素”的物质作成的。他们还认为，光是通过一种介质传播的，就像声音在空气中传播一样。他们称这种介质为“以太”。最后，就像已经获悉没有圣诞老人的孩子们一样，科学家们发现不存在燃素，并抛弃了以太的概念。但是，我们总觉得，如果有一个词，那一定有以这个词命名的东西。这就是“有烟就有火”的观点。

然而，还有另外一种我想探索的心理怪癖。我们总是倾向于用数来描述事物，而且更愿意只用一个数来衡量它们，不管它是经济状况还是人的智力。遗憾的是，这种习惯可能导致毫无意义，甚至有害。虽然我很喜欢数，可我还是要争辩说，数被过分地使用了，而且我要提出一种方法，以认定它们被滥用的常见形式。

暂时假想我们从未听说过数。即使这样，我们还是能够分辨一个人是否高于另一个人。只要让这两个人背靠背站着，看一下就行了。现在让数登场，并利用一条卷尺来量出每人的高度。于是，对应于较大数的那人较高。这个方法使我们能够确定哪一个人较高，即使他们相距甚远，甚至不在同一城市。高度是一个十分简单的概念，可以只用一个数来描述。由于这个

原因，我们说高度是一维的。

一个人的重量也是一维的。毋需用数，我们可以分辨一个人的重量是否大于另一个人。把两个人放在同天平轴距离相等的位置上，看谁往上翘，谁往下沉。自然也可以指望有一种方法给重量配上数。

其次，让我们考虑所有可能的颜色。每个颜色能否只用一个数描述？换句话说，所有的颜色能不能沿一条线排列起来？为了回答这个问题，让我们回顾一下艺术家们是如何组合三种原色——黄、蓝、红——以获得其他颜色的。例如，50%的黄色，50%的蓝色和0%的红色组合，得到绿色。或者60%黄色，40%蓝色和0%红色组合，产生淡绿色。把50%的黄色，0%的蓝色和50%的红色混合在一起，你会得到橘黄色。或者你还可以取出20%的黄色，30%的蓝色和50%的红色，得出另外一种颜色。每一次选取总和为100%的三个百分比，便产生一种不同的颜色，实际上，只要选取两个百分比就描述了一种颜色，因为它决定了第三个百分比。例如，假若你有18%的黄色和32%的蓝色，那么你就必定有50%的红色。

同高度和重量不一样，颜色不能只用一个数描述。它不是一维的。不可能把所有的颜色排在一条线上。这就给颜料制造商造成某种麻烦，他们陈列他们的样品色片，铺开来就像一个棋盘里的方格一样。

这也给学艺术的学生造成麻烦，他们不能忍受成打的各色软管。为减少开支和杂乱，他们可以只买几管，而用这少数几种颜色去配出其他颜色。但是，如果一周之后他们回到他们的画上工作，他们可能记不得产生一种确定颜色的精确组合。毫

无疑问，艺术学院的整个课程就是讨论颜色的理论与实践。

但是，颜色复杂得很，甚至用两个数也无法加以描述。艺术家们还必须注意“明暗度”和“色品”。明暗度是描述一种特定的颜色有多亮或多暗，而“色品”是指颜色的强度。文艺复兴时期的某些艺术家，只用有限种颜色作画，而强调明暗度。例如，达·芬奇几乎只用一种颜色作了一幅肖像画，但却通过明暗的强烈对比，获得了戏剧性效果。

代替高度、重量和颜色，我们来考察草莓。食物科学家已经发现，草莓中含有 1 000 种以上的化学物质，其中只有 15 种对味觉有重大影响。味觉是芳香和滋味的组合。（当冷空气堵塞你的鼻子时，味觉甚至可能消失。）食物科学家和生理学家尽管作了很多研究，但仍不了解形成一个人的味觉的机理。或许描述味的感觉需要许许多多的数，远远超过 15 个，或者随便多少个数也根本不可能描述味觉。

撇开高度，重量，颜色和味觉，让我们来看人们可能具有的“智力”的集合。不管“智力”是什么，据说它可以用一个数来衡量，即所谓智商，或简写为 IQ。如果智力确实能用一个数来衡量，那它必定是人的一个简单特征，像高度或重量一样——只不过另一个一维量。这似乎告诉我们，人的心智要比颜色或草莓的味觉简单得多。

但是，“智力”一词的意义是什么呢？按照一本词典的说法，它是获取和应用知识的能力。我想另外把它表述为应付生活挑战的能力。这就涉及到判断力，经验，毅力，情绪稳定性，社交技巧，阅读能力，以及应用所获知识的能力等等。像燃素或以太一样，智力这个词可能描述一个如此含糊不清的概

念，以致我们不妨认为它什么都不描述。这就是说，智商测试只能衡量应付智商测试的能力。（当人们的行动达到一个与其智商分数不一致的水平时，被称为超常发挥者或反常发挥者。这种策略便把对测试的责难转到了人身上，这个人展现出反常的、特异的行为。）

心理学家 J. P. 纪福特利用统计分析得出结论："至少有50个方面属于智力。简单化肯定有它的吸引力。但是，人类本性是异常复杂的，我们也要面对这个事实。"这就是说，描述智力至少需要50个数（如果智力真能用数加以描述的话）。

毋须惊讶，一个对波士顿的379名学龄儿童从1951到1992年的追踪调查发现，"父母加于儿童的求成压力，是比早期智商分数更强的关于工资收入与工作成就的预报因子。"另一项长期研究得出结论，在预报成就中，"性格特征，例如意志力，毅力和好胜"，起着关键的作用。

我猜想，如果抛弃智商测试，文明世界是不会注意到这个损失的。毕竟，在第一个智商测试被提出来之前，我们产生了文艺复兴，宪法和工业革命，发明了火车，汽车和飞机。（大概正是一个智商测试把我列入皮革工的第七级，当时我作了一个紫色皮夹。几个星期之后，我母亲向官方申诉，我被转行去教拉丁语。）

在19世纪，心理学家们声称，他们能用脑子的体积来测量智力。这个方法以一个给人印象深刻的名字"头盖测定学"问世，早已消失在历史的垃圾箱中。作为20世纪成果的智商，或许会遭受同样的命运。请看斯蒂芬·古尔德的《对人的错误衡量》，该书对于把智力归结为一个数的各种努力，有引人发

笑的详细透彻的说明。

在我们敢于只用一个数描述任何性质之前，我们应该首先问问自己，“它果真是如此简单，像一个人的高度一样，只是一维的吗?”紧接着，摆在我们面前的关键问题是，“是否有一个简单的方法能分辨出，一个对象比另一个对象具有更多的那个量。”在高度和重量的情况下，我们已经看到，回答是：是。

询问“谁更聪明，莫扎特还是爱因斯坦?”有任何意义吗?这个问题是荒谬可笑的，它告诫我们，不要指望智力能用一个数来衡量。它甚至可能难以用一组数来描述。

当比较各个种族的智商时，事情就更加荒谬了。分子遗传学家们指出，只有极少时刻曾获得各个种族之间比较大的遗传差别，即使他们可能已经分开了100 000年；100 000年只是一个太短的时间，以致大脑不能产生重大的遗传改变。在同一种族的个体之间的差异，远比种族之间的差异为大。如果给一个个体指定一个智商已经是不可靠的事，那么给一个种族指定一个平均智商就肯定是胡说八道。

数，既令人陶醉，又让人可怕。在我们社会里，数的运用者往往也是瞎话的运用者。一个头面的政治科学家曾经介绍过一个公式，那个公式产生一个数，据称可以衡量一个国家的“政治不稳定性”。奇怪的是，按照这个公式，法国是不稳定的，而南非是稳定的；这是在那样一个时代，任何一个读报的人都知道，反面是真实的。没等这位政治科学家被提名进国家科学院，这个公式就被（一位数学家）作为谬论给分析和揭露了。这位政治科学家的主要辩解，似乎就是对数学家的人格进行攻击。

下面是另一个例子，表明只用一个数不大可能揭示任何复杂事物的本质。

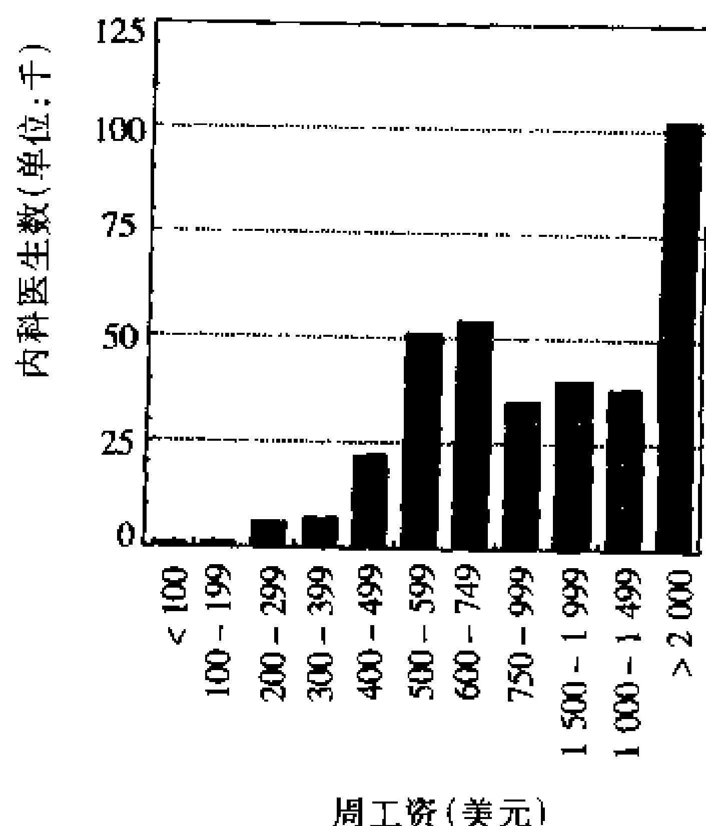
《纽约时报》在一张标题为“美国工资状况的抽样调查”的表中，对1994年49种职业的收入作了比较。为了进行比较，它不得不用单个数来描述每一项收入。它选取“周收入中值”作为衡量标准。对于内科医生，相应的数是996美元，约合52 000美元一年，这个数字给我的印象是非常之低。

我写信给为这张表提供数据的劳动统计办公室。在他们寄给我的一张计算机计算结果打印表中，信息是，对他们的内科医生样本，“平均”周收入是1 586美元。（按照美国医学会统计，1991年的平均数是3 281美元，当时内科医生的收入几乎都相同。）注意，中值和平均数是十分不同的概念。中值996美元告诉我们，一半内科医生挣的钱少于这个数，而另一半多于这个数。平均数比中值大这么多，是由于在这种情况下高收入的医生的大量出现。

基于一个样本为358 000位全日工作挣工资的内科医生的数据分类，如第29页图所示。

这些数比任何一个数都说明更多的问题。只用一个数来描述一种职业的工资收入的任何企图，都必定要牺牲重要的信息。甚至表中的这么多数也不反映全貌。例如，心外科医生所挣工资三倍于熟练的内科医生。无论我们用多少个数，都不容易达到真实的基石。确凿无疑的事实是稀世珍宝，不管是用言语还是用数表述都是一样。

想把一个概念归结为单个数的激情仍然应该保持。变模糊为精确，变复杂为简单，把只是我们想象的事物变为现实，肯



定是令人愉快的。不幸，重要的是，在生活中，一维的东西是很少的。

第五章　事例与数字

当卫生局医务主任宣称，根据持续几十年的多次大量研究，每天有 1 000 名美国人死于吸烟时，我们可以回应说，"乔叔叔每天吸烟两包，却活到 101 高龄。"我们可能认为，通过这个回答，我们已经反驳了医务主任的断言。我们的个人经验，虽然只是一个小样本，但它毕竟是赫然显现的，生动的和有说服力的。

我们的观点从何而来呢？它们常常是在少数事例基础上的推广。看到一个邻居做这做那，我们就可能推及所有红发人或所有瘦个子。按照这种方法，我们相信自己感知的证据。或者，我们也可能相信为我们引证一个可能真实也可能虚构的例子，然后加以推广的某领导人。无论在哪种情况下，我们都是根据有限的信息作出结论。我们把这种方法叫做“事例推理”，它往往是以一些富于戏剧效果的例子为基础，而不管它是最坏的剧本还是最好的剧本。令人惊奇的是，关于公共政策的许许多多争论，都是通过引用一些极端事例来进行的，而这些极端事例，或是真实的，或是虚构的。由于其特有的本性，这种方法常常存有内在的偏颇。

在福利体制的争论中，某人可以引用一个欺骗政府的接受者作为例证。别人在反驳中，可能提到一个中产阶级的妇女，她在一周之内失去了丈夫和工作，需要福利救济才能生存。

与事例推理相反，有一种为避免根据过少例证作出结论而设计的科学方法。数，而不是语言，是其主要工具。一位统计学家提出，“我只相信上帝，其他都必须提供数据。”按照这种方法，人们不是根据极端事例作出结论，而是把注意力放在极其大量的事例上。在某种意义上说，这个方法与事例推理完全相反，因为有时它会剔除给人误导的极端事例。下面将通过几个例子，对这两种方法进行对比。

巫师真能帮助警察解决犯罪问题吗？回答这个问题的方法之一，是考虑警察曾向巫师求教的众所周知的犯罪案件，回忆巫师的见解有无帮助。这个回答依赖于偶然想到的案例。这是日常生活中常用的方法，在这种方法中，争论双方都把个别事例抛

向对方。为要解决这个问题,洛杉矶警察局决定采用科学方法。

这就是警察心理学家 N.克里佛和 M.雷塞所进行的实验。一个侦探挑选出 6 个谋杀案件,并从每个犯罪现场抽取了证据。然后指定 12 位巫师,12 位侦探和 11 位大学生,根据证据写出对受害者和杀人犯的描述。这三组人的回答在数量上差别很大,其中巫师的描述平均为单行打字的一页半,而另两组人只有四分之一页。巫师的回答也在特性上有所不同,他们以较多的细节和自信显现他们的直觉。他们的视觉之典型者如下:

> 我看到某种医院,手术室……三枚枪弹造成的伤口……我看得很清楚。
>
> 或者
>
> 名字:普赖斯。他的右腕有问题。我不断看到数字 62。
>
> 或者
>
> 8 月 9 日。关于 8 月 9 日有某种重要事情……打网球。

因为巫师们的报告比“对照”组——侦探和大学生——的报告长得多,命中的机会应当更多。尽管有这个有利条件,巫师们的信息并不好。没有人——巫师或对照组的人——提出任何有用的信息,例如姓名,牌照号码或位置。

他们所作的准确陈述数如下:巫师 34;侦探 27;学生 39。这些差别在统计上是无关紧要的。

克里佛和雷塞作出结论:“使用巫师不可能产生有用的信

息。自我吹嘘的巫师们往往以使人非信不可的方式提供他们的信息，或者这种方式就是在法律实施中某些关于精神力量的绝对信仰的原因。人们信服，更多地是由于信息的戏剧性特征，而不是由于它的价值。”

我们不必要是统计学家，来进行和解释这个实验。数字说明了问题。

逻辑学家马丁·戴维斯以同样的精神提出了一个方法，测试一个占星术家的本领。通常一个占星术家被告知一个人的黄道十二宫，然后推算出关于这个人的特征与生活的种种情节。让占星术家根据关于你的特征与生活的信息计算出你所属的宫。（星术学家可以询问任何问题，只要这个问题的答案不提供你的生日的线索。）当然，因为有 12 宫，星术学家单凭猜测，有十二分之一的机会猜对。为减少这种机会，可让（比如说）24 个人去问他们所属的宫。即使没有占星术的本事，一个人大约能猜对两次。但是，要从 24 个中至少获得 12 个正确答案的机会是极小的。戴维斯没有进行这个实验，但或许在一次社交性聚会上，这是不难实现的。关键的人物是一个自信的占星术家。

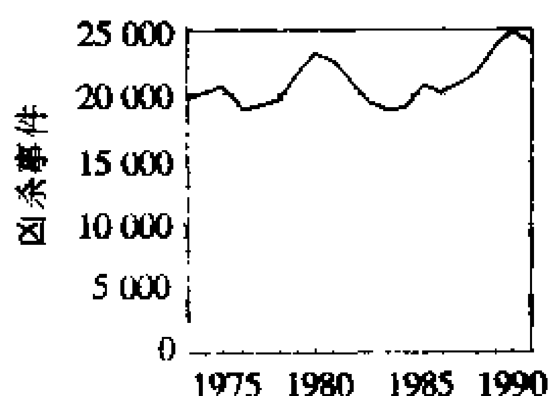
在离开这个超自然王国之前，我将描述我曾经作过的一个试验，也请你重复作一次。

新年前后，当你在食杂店的收款台前等候付账时你会看到一叠小报，其上登载了巫师们对新的一年所作的种种预言。我买了一份保存下来。年末我来核对，看有多少个预言被证明是正确的，多少个是错误的。（我没把那些模棱两可使我无法确定的预言计算在内。）平均命中率只是 5%。

把这告诉小报是毫无意义的，因为我知道它的读者喜欢这些预言：越令人惊奇越好。你也可以对参加年度预报典礼的任何先知，不管他是巫师、经济学家，还是政治权威，实施类似的检验。一年之后，当你检验他们时，你就会发现，你在破坏一条不成文的法规：往回看是无礼的。

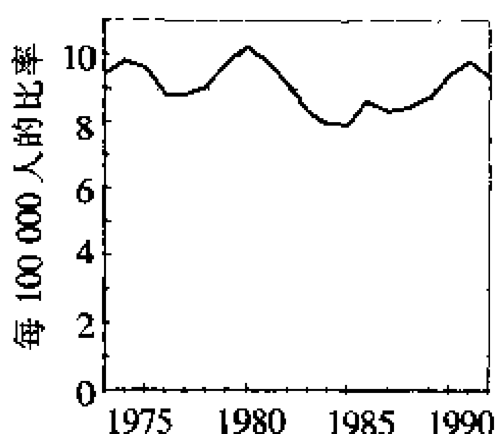
当我看地方新闻时，前 5 分或 10 分钟常常都是由黄绳围成警戒线的犯罪场景。即使在一个方便商店里发生的凶杀案远在 2 000 哩之外，也会向我显示血淋淋的细节。所以，在停业期间，我要检查我的门是否锁好。但是，在电视热衷于凶杀案的这段时间里，凶杀是引人注目地增加，还是突然猛增呢？这个问题也可借助于数加以研究。

我们不必等信息高速公路找出这些数，我们已经处于汪洋大海式的信息之中。问题不在于缺乏事实，而在于缺少整理它们的时间。作为一个例子，联邦调查局（FBI）每年发布统一罪行报告，其中包含的数字比任何一个人能够收集到的都多。让我们来看看，对美国在 20 年间的凶杀事件数目的升降，它告诉我们什么。



右边的图显示出从 1973 到 1992 年每年的凶杀事件数。1984 年最低，为 18 700，而 1991 年最高，为 24 700。有稍稍向上的趋势。但是，在此期间内，人口从 2.10 亿增长到了 2.55 亿。对我们更为方便的是，FBI 把人口的增加考虑在内，提供了另外一张表，显示

每 100 000 居民的凶杀案数。这个比率以 1973 年的 9.4 开始，以 1992 年的 9.3 告终。下图显示相同的 20 年间的比率。



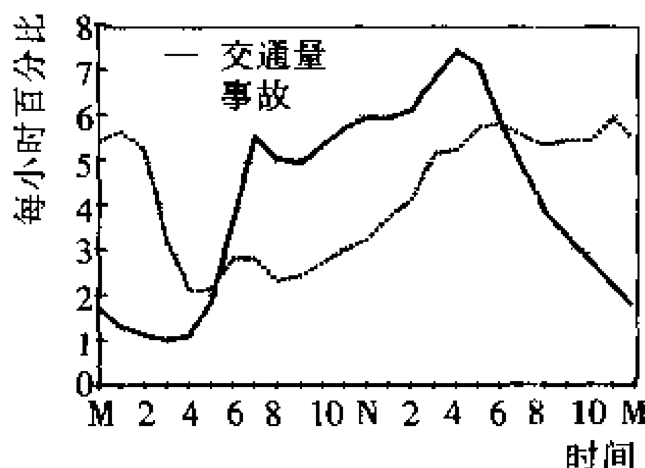
这个图形传递着与其他图形不同的信息。它描绘的不是一个向上的趋向，而是凶杀率围绕 9/100 000 的比率上上下下。它肯定不表明有突然地提高。只不过在电视新闻热衷于罪行报道的期间有所增长。而且，在 1995 年，若干大城市中的凶杀率大大地下降了。这表明，要获得一个可靠的事实是多么困难，而我们可能被引入歧途是多么容易。

读者可以浏览“恶性袭击事件”，“夜盗行为”，“机动车盗窃”等等。某些比率有所上升，某些有所下降。有足够的数据可以服务于你想要作出的任何例证。

在我离开 FBI 的报告之前，我要谈谈“正当杀人”，它指的是一个普通公民杀死一个正在犯罪的重罪犯。1990 年，276 起这类案件涉及火器。这些杀人案件包括房主枪击窃贼的案例。于是，我查阅另外一个非常好的各种数字的仓库——《美国统计摘要》，发现那一年有 1 416 件与火器有关的意外死亡。根据国家安全委员会的一个年度出版物，这些死者中有 800 人是在家里。（显然，我们已经深深陷人数的泥潭之中。）这就意味着，相对于每一个在室内被枪杀的窃贼，大约有 3 个无辜的人丧失了生命。这个比值提出了一个关于家庭拥有枪支的好处和危险的严肃问题。

夜间开车是否比白天开车更危险？我曾有一个基于以事例为证据的看法，但我想科学方法会是适用的。我决定把每个小时的事故数同相应的交通量进行比较。例如，如果这一天一个特定的小时占有日事故量的 6%，而只占有日交通量的 3%，那么它就是一个高危险小时。另一方面，如果一个小时占有日事故量的 3%和日交通量的 6%，它就是一个低危险小时。

碰巧，加利福尼亚交通局逐个小时记录了许多条道路和公路上的交通量。公路巡逻队保存有也按小时计的致命车辆事故的记录。想要对它们进行比较，我向他们要了几磅计算机结果打印纸。下图总结了他们的数据。



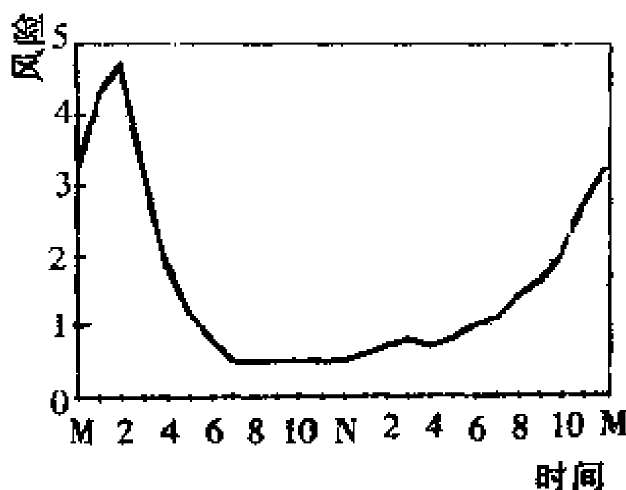
该图展示每小时百分比。例如，如果一天 24 小时的交通量相同，那么每个小时就有全日交通量的 1/24，或大约 4%。但是，交通量是变化的。夜间交通量较轻。白天交通量较重，早晨和傍晚急剧上升，形成两个高峰。

事故曲线和交通量曲线不一样。从早 6 点到晚 6 点，它貌似交通量曲线，如所预期。但是，为什么在交通量如此之少的夜间它会如此之高？这不可能只是由于黑暗，因为在交通量只有

些许减少的时间里——早2点到早4点，事故率却大量下降。

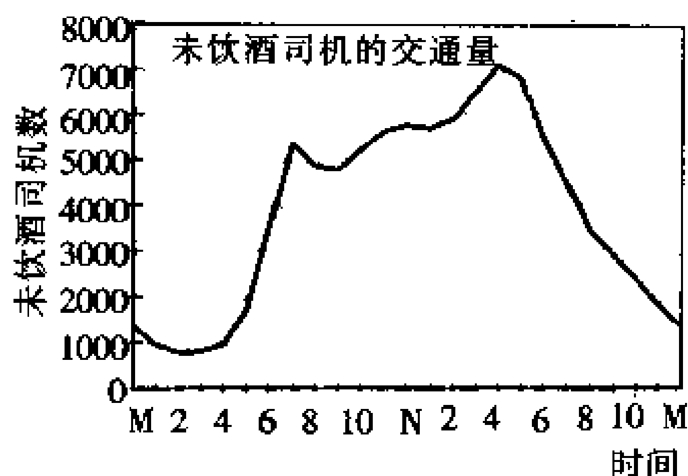
为了有助于揭开这个谜，我把在一天内任一小时的风险或危险定义为将事故百分比除以交通量百分比所得的数。例如，如果一个小时有6%的事故，但仅有3%的交通量，那么风险就是6/3，或2。另一方面，如果一个小时仅有3%的事故，但却有6%的交通量，那么风险就是3/6，或0.5。在一小时之内，如果有大量的事故，而交通量甚为稀少，那风险就大，大于1。另一方面，如果事故很少，而交通量密集，这个商就小，小于1。下图展示一天24小时内风险变化情况。它从早6点到晚6点逐渐升高，然后从晚6点到早2点急剧上升。为什么？

有人可能会想到，让我们来看看卷入致命单车事故的司机的酒精量。就是这个信息，也储存在计算机里面。

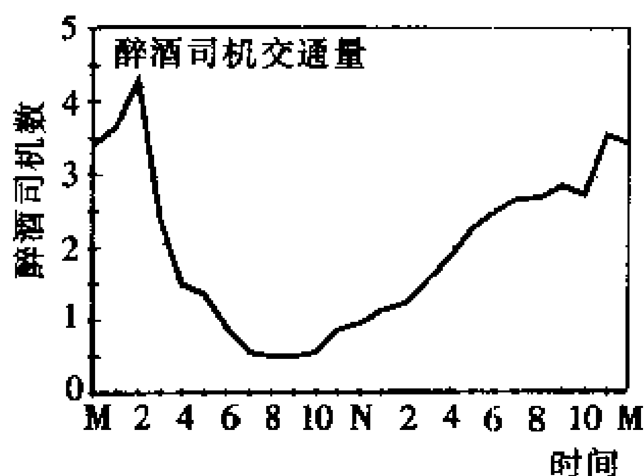


血液中酒精含量（BAC）至少为1‰（1 000份血液中1份酒精）就意味着司机醉酒了，或称之为“醉酒的”司机。（后来，加利福尼亚把这个界限值降低为0.8‰。）BAC为0，我们称之为“未饮酒的”。BAC介于二者之间，我们称之为“饮酒的”。下列二图显示出一天之内醉酒司机和未饮酒司机的变化

情况。在第二个图中我使用不同的比例尺，因为醉酒司机非常之少。



我发现特别有意思的是，醉酒图实际上和风险图的形状一样。这不是巧合。当风险达到它的顶峰期间，大约 80% 的致命事故与酒精有关。在白天，这个数字降为 20%。



我忍不住要来估计醉酒司机的风险因子。把这些打印结果

和其他数据结合起来，我发现，在白天和夜间的任何时候，醉酒司机的风险因子约为未饮酒司机的100倍。

当我把这些结论的一部分发表于《萨克拉门托蜜蜂报》（萨克拉门托是美一城市——译注）时，美联社也拾起了这个话题。一连好几星期，报社记者和谈话节目主持人对我进行了电话采访。虽然任何人都知道，饮酒与开车结合是不好的，但使人惊奇的是，这种结合竟是如此的危险。

在分析许多其他问题中，数，再加上一点儿算术，可以代替轶事传闻和花言巧语。例如，职业拳击是不是脱离贫困的一个途径？对冠军而言，或许是，但对于那些不太引人注意，以被打得晕头转向告终，而又没有任何有用技能的拳击手，情况怎么样呢？他们的故事是不会出现在官方体育杂志上的。为了解全貌，我们是否应该把脱离贫困的拳击手数目，同没有掌握有用技能，更加深陷贫困的拳击手数目，进行对比呢？（毕竟，除拳击外，没有任何职业需要工人具有把人击得失去知觉的能力。）同样的问题可以对篮球提问。在这方面，500 000年轻人中不到1%的人以在中学打篮球获得进入大学的奖学金。在大学打球的人，只有极少数能进入职业社团。热心体育者可能想要找出为回答这些问题所需要的数字。

令人惊奇的是，我们平常用言语表达的许多问题，都可以而且应该引进数字，用科学方法进行研究。读者会在充斥于当今报端的争论中找到大量的例子——争论的解决常常借助于雄辩而浮夸的谋略，例如骂人，虚构假设的事例，或引用极端而非典型的例证。

摆在我们国家面前的问题的大规模和复杂性，要求我们解

决问题的方法适当地现代化。我们需要更多的这样一个现代化的象征。

第六章　不一定是这样

围绕数学有许多不应有的不正确的说法。这可能源于两种情况的组合。一方面，每个人几乎每天都接触一点数学；另一方面，大部分数学远离日常社会生活，处于特殊符号和神秘定义的王国之中。我们对一个学科了解得越少，我们就越少为有关事实所累；所以我们就有更多的自由形成对该学科的观点。而且，我们信仰的基础越是动摇，我们往往会更加强烈地要抓住它，保护它，似乎我们依恋的强度就是其真实性的证据。

本章要批驳一些荒诞说法，而对另一些荒诞说法提出疑问，虽然这些说法可能是迷人的和常见的。

存在数学才能的基因

为美国大部分人所持有的这种信念，是远离带有普遍性的生活方式的。我从未见到支持这一信念的根据。相反，对于在学习数学中为什么一个人会比另一个人作得更好，我有更加简单得多的解释：在工作上有效利用时间，也就是说，把大量的时间用于精心组织的研究。任何一个关掉电视，注意细节而又有坚持性的正常人，都能学习数学。我是在谈学习现已存在的数学，而不是谈建立新的数学。我的这一结论，是基于我教几千名大学生和在学校中辅导的经验。一个人的身高，体重，发色，种族，性别或国籍都与此无关。这个意见适用于幼儿园小

孩直到博士研究生，甚至更大的范围。

当然，是有那样的情况，数学家的孩子成为数学家。但是，同样也有，马戏团杂技演员的孩子成为马戏团杂技演员。没有人提出，存在马戏团杂技演员的基因。

数学中没有新内容。它是一个僵死的学科

人们可能以为，所有数学都在几个世纪以前就发明和完善了，因为在学校全部课程中没有提出别的东西。自然数符号的十进制，可以回溯到公元600年的印度数学家，1202年由利奥拉多·斐波那契引入欧洲。0和1之间的数的十进制符号，在欧洲可以回溯到大约1 600年，而阿拉伯数学家早在1 000年左右就已经知道。

几乎全部中学几何都取材于公元前300年左右欧几里德的一本书。三角学是希腊天文学家在大约1 800年前充分发展的。

负数和使用字母表示数可以回溯到17世纪。用字母表前面的一些字母表示常数，和用x，y，z表示变数或未知数的实践，甚至可以回溯到更远的年代。学生所看到的几乎所有数学，从幼儿园的数学到微积分，都是至少经历了三个世纪的古物。这并不是说它们是过时的。远非过时。它们仍然是进入数学殿堂的前门。教授或学习已有（比如说）600年历史的数学没有错。它仍是大多数人需要的数学。毕竟，说用这样一些直接来自拉丁语的有用词汇，例如item（项目，条款），exit（出口），agenda（议事日程）或credit（信任，荣誉），并不带来什么耻辱，它们都经历了大约2 000年的历史。

但是，数学并没有躺倒在它的荣誉上，还在继续发展。事

实上，它仍处在它的黄金时代，从文艺复兴时期以来一直在不断延伸。假如让我挑出这一阶段的起始日期，那就是1439年约翰尼斯·格坦伯格的印刷机发明，从手写稿件到印刷书本的转变，骤然使古代知识和现代发现能为广大公众所周知。

为给你一点关于数学活力的概念，我将引用几个数字。《数学评论》只是介绍新的纯粹与应用数学的简短摘要，每月就需要600页。在一年期间，它要涉及到约50 000位数学家的工作。虽然这些研究的大部分不会成为数学的永久性部分，但重要部分会持久。对于大部分新的研究工作，要预言哪些会持续下去，哪些会从眼面前消失，是不可能的。但是，有时，如果一种新的真知灼见解决了一个著名的问题，或者重新建立了一个重要领域的基础，或者发现了数学之外的有价值的应用，那它显然是不会很快被人遗忘的。新发现所依据的早先的结果，原来可能被认为几乎没有意义，现在突然被证明有持久的重要性。

数学家所作的全部工作就是研究数

许多数学家，例如逻辑学家，拓扑学家，代数学家和理论计算机科学家，可能根本不作任何计算，甚至根本碰不着数。有些十分重要的发现，不涉及数。

我将以1926年发表的L. E. 布劳维尔（1881—1966）“不动点定理”为例，对它作一个非正式的叙述。

设想你有一个圆纸片放在桌上。拿起来，把它折叠弄皱，愿意这么作多少次就作多少次，但不要把它弄破。然后，仍然保持折叠的样式，将它放回到桌子上原来所处的圆圈之内。布劳维尔说，纸中至少有一点要回到它原先所处的位置，或者直

接位于它的初始位置之上。这是很不明显的；这个证明是被称之为拓扑学的领域的一部分。

这里是另一个例子，它来自对策论和物理学。比方说，让你用字母 a，b，c 构成一条字母“线”（无意义的词）。例如，accbacbac 就是一条线。这条特殊的线碰巧包括一条更短的线，它由一条线的两个复制品所构成。例如，它包含 cc 线，是 c 线的重复。它也包含 cbacba 线，是 cba 线的重复。它还包含 bacbac，是 bac 的重复。但是 abacbabcab 线不包含重复的线。问题是，“不含重复线的线能有多长？”令人惊奇的是，存在不包含这种重复的没完没了的线。还请注意，在这个问题中，数不起任何作用。（这里有一个有趣的此种风格的问题：假如只允许你使用 a 和 b 两个字母，你能作一条多长的无重复子线的线？）

数学家把整天的时间都用在计算机上

许多数学家甚至不拥有计算机，许多数学家只是把它用作文字处理机。某些数学家确实用计算机进行计算，但那是些繁重的计算，或者是用手一生都做不完的计算。计算机提供信息，导致新的见解和问题。在这方面，计算机服务于数学家，就像望远镜服务于天文学家一样。我相信，天文学家不会整天或整夜地看望远镜。

数学家从公理出发，看能推出些什么定理，然后寻找例子

新数学不是以这种死板的有序的方式产生的。否则，数学就会很快干涸。

现在来看看，新数学通常是如何建立的。它始于某人试图解释或描述某种自然现象或两种数学思想的相似性，或始于某人试图对许多例子和大量计算结果作合理解释。这些例子是先

有的，而不是后找的。

然后，某人就用一点推理，寻找能够解释这个谜的假设。此时便有一个定理，它由假设和结论以及证明组成。接着，为了优美起见，为了更深刻地理解这一发现，人们试图把假设削减到最低限度。

在证明许多相关定理之后，人们就试图建立一个条理清晰的构造，它由少量的假设和精确的定义构成，由它可以推出全部定理。这些假设称为公理。于是，所有这一切告诉我们，真实的顺序是例子，定理，公理——与某些人的说法完全相反。第一个以这种方式把许多定理收集在一个公理系统中的人是欧几里德，在公元前300年左右。

麻烦的是，数学家们可能遵循一条导致死胡同的途径。例如，他们可能认为一个问题（比如说）是几何问题，而结果它却是代数问题。试图用直尺和圆规（画圆之用）作一个20°角的古希腊问题，就是这样。

只用这样两个工具，他们很容易作出一个90°角，然后重复二等分得到45°和22.5°。他们通过作等边三角形，得到60°角，然后平分，得30°和15°。但是，他们永远得不到20°，尽管他们努力尝试。这就意味着，他们不能三等分一个60°角，也不能建立一个正九边形（因为他们得不到360/9 = 40°的角）。这些问题听起来都是几何的，但是，它们的解答却是代数的。

P. L. 万泽尔（1814—1848）在1837年指出，没有人能只用那两个工具作出一个20°角，因为一个确定的数（20°的余弦）不可能由整数经过四则运算和开方得到。他的论证完全是代数的。

所以，一位数学家，像一位侦探、一位爬山运动员，或一位探险家一样，必须保持灵活，随时准备此路不通时采取一条新的路线。

数学家30岁开始走下坡路

人们常说，数学家都是在他们达到30岁之前时做出最好的工作；此后就一路下滑。这种说法可能来自两位伟大数学家的经历；他们是挪威人内尔斯·阿贝尔（1802—1829）和法国人伊瓦里斯特·伽罗瓦（1811—1832）。尽管他们的生命短暂，两人都对数学做出了重要贡献，其中伽罗瓦实质上建立了现代代数学。部分由于这两位数学家的原因，G. H. 哈代（1877—1947）在《一位数学家的遗憾》一文中评论道，"数学家不应允许自己忘记，比起任何别的艺术和科学，数学更是年轻人的游戏。"

十几岁的青少年可以把数学作得很好，就像可以把音乐、国际象棋、网球、花样滑冰、游泳或体操作得很好一样。我对一位15岁的数学天才的印象，并不比对一位14岁的职业网球运动员或一位奥林匹克体操家的印象更为深刻。毕泽特17岁创作了C大调交响曲，孟德尔森18岁创作了"仲夏夜之梦"的序曲，我也不感到惊奇。虽然这些成就需要伟大的天才，专心致志和勤奋，但它们毋需对人类状况有广泛的了解。然而，如果一个十几岁的人写出一个深刻的剧本或一部深刻的小说，具有深人的性格发展，那么我就会感到惊奇，因为创作这样的作品需要深人人类心灵的洞察力，只能来自有多年生活经历的洞察力。

一个儿童是否能有个良好的开端，通常是环境的问题。例

如，当阿贝尔15岁时，他严厉的校长被一位有学识的数学家所替代，这位数学家指导了他的阅读。没有这样一个转变，我怀疑我们会不会听到阿贝尔的名字。数学家约瑟夫·伯特兰德（1822—1900）11岁进入声誉卓著的大学，高等工业学院（巴黎高工——译注）。这听起来令人惊奇，如果你不知道他的表兄，数学家J. C. M. 杜哈麦（1797—1872）指导他的话。

数学创造力也不是在30岁之后必然逐渐消失，正如下面几个例子所显示的那样。

安德鲁·威尔斯于1994年在他41岁时，解决了他已研究8年之久的数学中著名问题，有300年历史的费马定理。（他证明了，若n是一个大于或等于3的整数，则无整数x，y，z满足$x^n + y^n = z^n$。）

在1976年，当沃尔夫冈·哈肯48岁，肯尼思·阿帕尔44岁时，他们解决了早在1852年提出的四色问题。（他们证明了，画在一张纸上的地图，可以最多只用四种颜色着色，使得有共同边界的两个国家沿它们的边界线有不同的颜色。）

路易斯·德·布兰奇斯在1983年证实了1916年提出的复分析中的比伯巴赫猜想，当时他是52岁。许多数学家曾经提出错误的证明，因此人们常说，“比伯巴赫猜想并不困难；我已经几十次地证明了它。”

罗杰·阿佩里（1916—1994）在1977年发现了一个被称为“不可思议的和极其漂亮的”证明，证实了所有立方的倒数之和不是一个分数，当时他已超过60岁。这就是说，如果你继续不断地将数$1/1^3$，$1/2^3$，$1/3^3$，$1/4^3$，……相加，其和将越来越接近一个确定的数，且该数不能写成a/b的形式，其中a

和b都是整数。两百多年以前就已知道，所有平方的倒数之和不是一个分数。事实上，这个和是$\pi^2/6$，它是利昂纳德·欧拉（1707—1783）在1743年作出的发现。

许多数学家在他们70多岁甚至更晚的时候，继续作出一流的工作。I. M. 盖尔芳德，一位移居拉特格斯的俄罗斯数学家，在他80多岁的时候，仍在继续做出重大贡献。在这方面，盖尔芳德很像格斯帕·维第，后者在79岁时写下被认为是他最好的歌剧之一的《福斯泰夫》（福斯泰夫是莎士比亚剧中的一个肥胖、快活、滑稽的角色——译注）。健康的体魄，愉快的家庭生活，和避免繁重行政负担的诀窍，可能是数学长寿的关键。我把确定一个数学家一生中最佳年龄段和为什么有些数学家终身保持创造性的问题，留给历史学家和心理学家们。

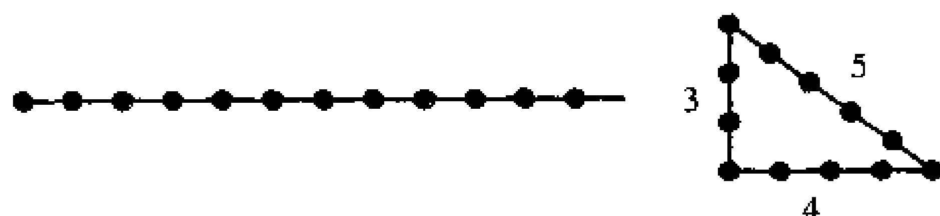
即使限于它纯朴的真理也是迷人的数学，在漫长的历史中，积累了好些轶事式的神话，又增添了它的超常色彩。这里是几个按年代次序列举的例子。

埃及人使用绳子，以3—4—5三角形的形式，在金字塔的底部构成直角

在1993年出版的一本几何书中，你会找到这个断言："为了作一直角，古埃及人拿一条有12个等距离的结的绳子，在两个地方把它弯过来，以形成如图所示的边长为3，4，5的三角形。"

古埃及人有绳子，那是真的。如果你参观纽约大都市博物馆的埃及厅，你自己就可以看到一个样品。它看起来就像现代的绳子一样。而且，壁画展示，埃及测量员使用绳子的方式，跟现在的测量员使用长卷尺一样。3—4—5三角形有一个直

角，金字塔有直角，也都是真的。



但是，没有证据表明埃及人使用过这种拉绳子的办法作直角。相信他们这样作过的信念，来自历史学家莫里兹·康托尔在他的1907年出版的四卷本《数学史讲义》中提出的一个猜想：

> 埃及人拥有木工直尺，这在一个木工车间的壁画中有清楚的展示。我们不得不承认这个工具的精确率，而这似乎需要某种几何构造。大概，在隆重庄严的场合，例如建造寺庙，精确率要重新检验。诚然，建造寺庙的仪式没有揭示这是怎样作的。
>
> 让我们没有根据地猜想，埃及人已经知道，当把长为3，4，5的三个边连接起来构成一个三角形时，两个较短的边形成一个直角。现在，让我们猜想，他们用打结的办法把一根长为12的绳子分成长为3，4，5的小段。显然，当围绕三个标桩把绳子拉直时，就产生一个直角。

康托尔从来没有把他的断言当作事实来陈述。实际上，他的推理充满着好多假设。但是，随着时间的推移，这些假设消失了，而猜想发展成为一个历史事实。

历史学家们劝我不要理会没有确凿证据，即没有原始根据的任何历史断言。这个建议使我像一位数学家一样，因为我爱看安排得干净利索的假设和逻辑步骤。这就是我为什么不读历史小说的原因。我喜欢历史和小说，但不喜欢它们的混合物，因为那样我就不知道我是处在一个什么样的世界之中。我宁可喝一碗加冰淇淋的豆汤。

在胡夫大金字塔中，在巴台依神庙（在希腊雅典——译注）中，在绘画中，在联合国大厦中，在最漂亮的矩形尺寸中，在人体中，以及在维吉尔（古罗马诗人——译注）的史诗中，都出现黄金比

黄金比是数（$1+\sqrt{5}$）/2，其小数表示的前几位数字是1.618。大量的文章都试图表明，它是设计许多漂亮物体的关键。但是，乔治·马柯夫斯基在“关于黄金比的误解”中逐一否定了这些说法。我将只对他的发现给予简短的一瞥。

虽然古希腊数学家接触过黄金比，但没有证据表明，他们曾把它和美学联系起来。更确切地说，它描述了把一个线段分成两段的一定方式。在线段AB上有惟一的一个点C，使得AB与AC之比，等同于AC与CB之比，如下图所示。对该点C，比值AB/AC等于比值AC/CB，且被称为黄金比，这个名称首见于1835年。



黄金比在大金字塔出现了吗？金字塔有如此之多的尺寸——宽度，高度，斜高，边长，半宽等等——以致你可以从中

硬行拼凑出你想要的任何一个数，就像你可以在一碗字母汤中发现几乎任何字母一样。大金字塔的设计符合黄金比的说法是1859年首次提出的，其依据是一个伪造的希罗多德（古希腊历史学家——译注）译本。

类似地，巴台侬神庙，利奥拉多·达·芬奇的油画，联合国大厦，维吉尔的史诗以及人体符合黄金比的断言，也都是站不住脚的。在每一种情形下，都有如此之多的可资利用的数，以致你可以为2或3/4或你所偏爱的任何数，作出似乎是强有力的例证。

或许我们大部分人都经常听说，最漂亮的矩形是这样的矩形，其长为其宽的1.618倍，即长宽比为黄金比。这个断言没有任何根据。当马柯夫斯基要求人们从各种形状的大量矩形中挑选出最漂亮的矩形时，最常被挑出的一个矩形之长宽比为1.83。你可以自己进行这个实验，假如你仍旧相信黄金比的话。

阿基米德高喊“我发现了”，并声称他能搬动地球

我们经常听说，当阿基米德发现浮力原理时，他跳出澡盆，赤裸着跑过西那库斯（一希腊古城——译注），高喊Eureka，Eureka是“我发现了”的希腊语。可能他这样做了，也可能他没有这样做。在他残存的手稿中，有些手稿包含闲聊家常的介绍，但却没有提到这个情节。这情节是生活在公元前一世纪，比死于公元前212年的阿基米德大约晚两个世纪的一个罗马建筑师维丘维厄斯提出的：

当他走下浴池时，他注意到，流到池外的水量等于他沉入水中的体重。因为这个事实指出了确定皇冠是

否由黄金做成的方法，他毫不迟疑，高兴激动地跳出水池，赤裸着跑回家，高喊他发现了正是他在寻找的东西。他一边跑，一边用希腊语高喊：eureka，eureka。

对我来说，它听起来好像是在这个事件之后很久才虚构出来的一个细节。我认为，阿基米德获得了那么多的激动人心的发现，以致他不会每有一个新的见地就沿街奔跑。但是，这个传说也可能是真的。在任何情况下，我只把它当成一粒盐（更恰当地说，一条罗马谚语）。

阿基米德搬动地球的宣称的第一个纪录，是在阿基米德之后三个世纪写成的《普鲁塔克（古希腊传记作家——译注）的生活》之中："阿基米德宣称，如果另有一个世界，我将走进那里，我能搬动这个世界。"

这个断言似乎是接受传闻作为它的根源。可能有更早的文字根据，现已失散。但是，令我惊奇的是，最早的残存参考资料竟在阿基米德死后这么久才出现。他的成就是如此的惊人，以致毋须在他的一生附加一些虚构的情节。你只须阅读他对浮体的论述，你就会确信他发现了造船工程的科学。为对他的发现作一个提示，让我们来考察下图中的两个抛物形体木块。



设想它们都静止在桌子上。如果你让左边的那个木块倾斜，它会回到原来的静止位置。但是，如果你让右边的木块倾斜，它就会倒下。阿基米德发现，足够浅的抛物形会回到原来的静止位置，而太高的抛物形会倒下。

牛顿发明了微积分，以解决行星运动问题

伊萨克·牛顿（1642—1727）于1665年和1666年发明了微积分，但直到1680年左右，他才着手处理确定行星轨道的问题。当他这样做时，他用的是几何方法，而不是他的微积分算法。某些历史学家断言，他先借助于微积分分析轨道，但由于他的读者中几乎无人了解这个学科，他又几何地重述了他的论证。在他幸存的手稿中找不到这方面的证据，虽然保存下来的手稿有几百页。

伽罗瓦在使他丧生的决斗前夕详细写出了他的一些伟大发现

这个传说可以回溯到E. T. 贝尔在1937年发表的《数学人》中的一段：

> 在他预见到会袭击他的死亡之前，整整一夜，他用飞逝的一个一个小时，心情激动地匆匆完成了他的科学遗嘱，争分夺秒地奋笔疾书，以发掘他多产的心灵中的一些重大问题。他一次又一次地中断写作，在页边上乱涂“我没时间，我没时间”，然后又转向下一个狂乱潦草的大纲。在天亮之前那几个令人绝望的小时中他所写的内容，将会使一代一代的数学家不断忙碌几百年。

确实，伽罗瓦死于一场决斗，决斗前夕他写了好多封信，对他的一些论文作了注释，而且在其中之一上写了“我没时间”，但他写这句话只是一次。贝尔描述的其余部分是纯粹的虚构，正如托尼·罗思曼在他的文章“创造能力与传记作者：伊瓦里斯特·伽罗瓦的小说化”中所表明的那样；“当他17岁的时候，伽罗瓦提交了关于（群论）这个主题的论文……在这天夜里，他对他的一些论文作了注释和更正。”真正该使数学家不断忙碌的该是这最后一夜之前的一到四年里所写的内容。

高斯测量了三个山之间的角，看空间是不是欧几里德的

许多年来，我总是听说，C.F. 高斯（1777 – 1855）测量了由三个山峰所构成的角之和，看这个和是否真为180°。如果不是，那么空间就会不遵从通常的几何学法则，从而它就是一个非欧几里德空间的例子。例如，M·克莱因在他的《古今数学思想》中写道，“他发现这个和比180°多了14.85秒。这个实验什么也证明不了，因为（可能有的）实验误差更大。”克莱因甚至还引证了高斯1827年的一篇文章中载有这个数据的那一页。

确实，高斯进行了这样一个实验，但他这样做只是为了检验，地球不是一个理想的球体（在它的两极较为扁平）这个事实，会不会严重影响他的汉诺威（德国城市——译注）大地测量的计算。阿瑟·米勒在“高斯关于物理空间的欧几里德性质的实验的传说”中指出，高斯从未宣称他的实验与空间性质有关。米勒猜想，这个传说来源于对1916年发表的爱因斯坦的广义相对论的回应，当时“物理空间是不是弯曲的这个问题具有新的意义。”由于爱因斯坦使用了乔治·黎曼（1826—1866）

在 1854 年发展的数学，而后者又与高斯 1827 年的文章有关，有人可能就“往回推断（当然，没有查阅）”。

童年的爱因斯坦算术成绩不好

人们往往把爱因斯坦（1879—1955）视作一位数学家。他不是。他没有发明任何数学；确切地说，他是应用现有数学于物理学领域。称他为一位“理论物理学家”，或一位“数学物理学家”，更为准确。

他在算术方面很差吗？完全不是。相反，他十分长于数学。说他算术不好的传说是由于一个误解。当他是一个小学生时，他的学校改变了计分制，以致原先的最高分成了最低分。任何看到爱因斯坦的成绩单而又不知道这个变化的人，便会认定，爱因斯坦突然丧失了数学能力。

没有数学诺贝尔奖，是因为一位可能获奖的数学家与诺贝尔的妻子有染

人们常说，数学家戈斯塔·米特格—莱福勒（1846—1927）与阿尔福雷德·诺贝尔的妻子有染，而且他会是这个奖的首要候选人。这个传说使数学家感到得意，但有一个漏洞。诺贝尔从未结过婚。因此，他从未有过妻子。换句话说，他是一个终身单身汉。关于这个传说就说这么多。如果能找出发明这个故事的实际诙谐者的名字，那将是十分有趣的。没有根据表明，诺贝尔不喜欢米特格—莱福勒。

如果由于对这些传说中的任何一个提出疑问，我倒了任一读者的胃口，我道歉。我相信，历史的真相已足以令人兴奋。读一本认真根据大量记实材料写成的历史书，一个包含各个时代的书信和日记的书，是一种乐趣。读着它，我感到我充分地

接近了事件和本原，无人能进入我和过去之间。我想这就是人们为什么会有下列举动的原因：收集旧报纸，重演林肯一道格拉斯争辩或格提斯堡战斗，摸摸在广岛投下原子弹的飞机，或者珍爱柏林墙的一块混凝土。他们想要绕过来到他们和过去之间的“各个阶层的历史学家”。

由此想到，就像我喜欢直接去领会历史一样，我喜欢数学。当一个定理被放在我桌上的一张纸上时，在它和我之间任何事物不复存在。没有机会使荒谬的传说得以形成并取得自身的生命力。有什么我看到什么。如今，当什么事似乎都伴随编造而来的时候，这是一条宝贵的经验。

第七章　快速的傻子

现在的汽车基本上还是一个世纪前的汽车：四个车轮，一个发动机，一个加速器，一个制动器，一个驾驶盘和前灯。虽然不断有令人满意的改进，但老式汽车依旧同现代汽车并排地行驶在大道和公路上。我猜想，一个世纪后的汽车还会和今天的汽车相似。但是，对计算机而言，就不是这样。没有人能够自信地预言，哪怕只是几年之后，会有什么魔术般的计算机为我们工作。实际上，就在你买回一台新计算机的时刻，它就成了过时之物。

计算机有两个基本特征。它非常之快，有些计算机一秒钟内能够完成十亿次以上的运算。同时，它几乎没有错误。这两个特征相结合，使得我们的大脑可以免去日常的脑力工作，就

像蒸汽铲和真空吸尘器使我们的身体免去日常的体力工作一样。仅仅半个世纪，计算机已是如此的普遍，以致我们难于知道它们的存在。或许，关键的日子甚至更近——1977，当时苹果牌私人计算机首次问世。

当我停下来思考它的时候，我发现，计算机已在比我想象的要多的各个方面溜进了我的生活。

- ☐ 当我发动汽车时，计算机调整空气和汽油的混合物。
- ☐ 当我电话询问我的银行账户结余时，计算机告诉我。
- ☐ 在食杂店和加油站，我不需要使用现金，而只需一张塑料卡，这也要归功于某台计算机。
- ☐ 当我需要现金时，即使我的开户银行关门，即使在节假日，即使我离家几千哩远，我只要把一张塑料卡塞入墙内的一个窄槽之中，就会出来20美元钞票。
- ☐ 当我看到屏幕上出现电视频道的标识时，我就拧扭，旋转，放大，于是看到由计算机（借助于大量代数）所完成的动画片。
- ☐ 当我去玩保龄球时，不仅有自动装瓶机把倒下的木瓶拾起来并放回原处——这是旧的设施，而且有一台钩连在装瓶机上的计算机作所有这些事情：评分，显示头两球木瓶全倒和第一球木瓶全倒，以及登录连续得分的总和。
- ☐ 当我打长途电话时，看不见的计算机很快按指定路线发送出去，记录时间，电话号码，地点和费用。之后，它们打印出账单，并（据我所知）投入邮筒。
- ☐ 当我坐在一个连锁饭店里的时候，我想它的温度是由

装在大楼里的恒温器控制的。但结果是，远在约2 000哩之外的全国总店的一台计算机在负责此事。

- 当我想找数学家罗杰·阿佩里在1960年前后所写的一篇文章中的一个报告时，我先徒劳地查了好几个年度的《数学评论》。后来，参考室的图书馆员告诉我，在一个CD－ROM（只读光盘）上，可以找到《评论》。在几秒钟之内，它就显示出一张表格，开列了阿佩里前后40年的全部论文。
- 在我的研究工作中不时使用计算机，来完成手算需要几年或几十年的计算任务。计算结果有时否定一个猜想，有时提出一个新的猜想。在这方面，计算机为我服务的方式，就像望远镜服务于天文学家，或显微镜服务于生物学家一样，使我可以进一步深入到数学现象的天地。

当我研究醉酒开车与未饮酒开车之比时，我曾作了一张表，列出一周168小时中每一小时的事故数和交通量。然后，我要用事故数除以交通量，以获得168小时中每一小时的事故风险程度。即便使用计算器，这也是件令人厌烦的工作。但是，一台计算机瞬间便完成了168次除法。

我甚至能用计算机来打充满数学符号和复杂表达式的论文。利用特殊的软件，我可以像打一个句子一样，成行地一个符号接着一个符号，给一个等式排版。例如，如果我打 `$$ {3+2 \over {1+7}} =0.625$$`，打印机就会显示

$$\frac{3+2}{1+7}=0.625$$

因为在我和最终的书本之间没有排字工人参与，所以几乎没有产生新错误的机会。我可以作出供照相用的文字和图像。

通过一个调制解调器把我的计算机同外界连接，我可以给匈牙利的一位数学家去信，并在当天收到复函。航空邮件，别名"蜗牛邮件"，一个来回至少三个星期。

为写这本书，我用计算机作为文字处理机。实际上，我用钢笔和墨水写第一稿，经常要把钢笔浸入墨水瓶，就像我是在用一枝18世纪的鹅毛笔似的。（一次，一位工程师劝我"使用运动部分最少的器具"。）然后我把原文转移到计算机上，在机上进行编辑简直不可思议地方便。如果我要掉换两个段落，我不需要重打一页，像过去年代的打字机那样。如果我要删去一段，也不需要重打整个一章。但是，我必须保持警惕，抵抗诱惑，注意不要丢掉什么东西。无论丢掉多少内容，屏幕上的显示总是整洁的，最终形式的。此外，正如乔舒亚·斯坦因在《注重实际的律师》中警告他的律师同行所说的那样，"计算机肯定能帮助你，使你更富有成效，但它也可以引导你集中注意力于细节（没完没了地忙于版式），而不是注意重要问题。"

但是，硬盘出问题，手指按错误的键，断电，计算机发出说不清原因的碰撞声，都能使几天的工作成果化为乌有。一台计算机是处于物理学家们所说的"不稳定平衡状态"之中。它像在一个顶端上保持平衡的鸡蛋：稍微偏离理想位置就会造成灾难。（我正想到一位同事，他丢失了一个班级积累一个多学期的成绩，而没有留下软盘拷贝或打印在纸上的所谓硬拷贝。）由于这个原因，个人计算机使用者必须经常回头检查，至少每个计算日一次，有时一天三次。大的机构可有一台辅助计算

机，复制其主机的工作和存储。“关键性的任务”，例如登月，可用三台完全相同的计算机，作同样的计算。

当我们在家里，在汽车内，在办公室内，或在工厂里添加越来越多的计算机和计算机操作设备时，维修问题随之增加。我们有一个呼求服务的号码800，但在周末它可能不好用，或者只向我们提供忙碌信号。我们能够使之保持正常运转状态的设备——机械的或电子的——数目有一个上限。当我想到我家的许多设备——洗碗机，垃圾处理机，恒温器，洗衣机，干燥器，微波炉，电视机，收音机，时钟，炉子，空调机等等——的时候，我真感到那是一个奇迹，我没有把我的全部时间都用于应付机器故障。实际上，当我打电话给修理人让他们马上到来时，往往得日复一日地等待。有时，我真想摆脱所有的机器，包括我的计算机，过着更简单的生活，以免遭受到不必要的冲击。

虽然计算机科学家谈到计算机的人工智能，并且创作了打败一个国际象棋好手的软件，但是我们应该记住，一台计算机只是一系列不可思议地快速开闭的开关。它并不比一个打蛋器精明。有时，当我使用拼写检验时，我开始想计算机真有头脑。但是，当在它的词典中找不到Leibniz（莱布尼兹，德国数学家——译注）这个词时，它就提出Albion作为更正，这就再次使我想到它的极度愚蠢。

计算机只能作告诉他作的事情。输出什么决定于输入什么。正如程序员所警告的那样，“进去垃圾，出来垃圾”。预报员说“计算机预报”，实际上是说，“我作了某些假设，定义了几个变量，赋予了它们某些数值，并启动了计算机。”假设和

程序决定着计算机吐出什么。简单地说，“什么想法进去，什么想法出来。”正如一位经济学家所警告的，“如果你不会在信封背面做算术，计算机也不会有什么帮助。”

一个例子将会说明，为什么我们要对借助于计算机作出的预报保持警惕。它关乎80年代旅馆的过量修建造成90年代的供过于求。在一篇标题为“旅馆业苦恼的原因”的文章中，M.J.和J.J.弗兰内里写道：

> 虽然历史以很快的步伐前进……个人仍然难免会犯错误。使用计算机化模型来预报未来现金流向，导致许多人的误解，以为投资分析是一门精确的科学。计算机使得提出许多方案成为可能。这种玩“如果……将会怎样”游戏的能力应当产生更好的判断。相反，它导致人们接受伪科学的必然性。
>
> 计算机模型很少集中在基本的假设上。许多分析家“推拿数字”，他们调整通货膨胀率，加强占有率，微调比率，削减消费。当方案没有产生预期结果时，它们的辩护者便重改数字，直到那些模型提供所希望的成果为止。

我对“计算机预报”的报告毫不关心，除非我看到那些报告所依据的全部假设。换句话说，我要与之对话的是口技表演者，而不是嘴巴上下移动以摹仿思想的哑巴。

计算机也正在渗入各个年级的教室，使得学生们可以进行那些过于麻烦以致不能用纸和笔来作的数值与几何实验。但这

里存在着危险，特别是在靠税收支撑的公立学校中——不便明说的真话。在这方面若无适当的资助体制，计算机的一个故障就有可能破坏设计得非常好的课程计划。太多的计算机由于缺乏训练有素的人员来使用或服务于它们而失去活力。

还有一个危险，那就是，计算机可能扮演独裁教师的角色，这样的教师总是说，“别问为什么，就照我说的去做”。于是，它就成了一个黑箱子，它的使用就把学生放在了一个从属的位置。这种情况发生在数学中是最令人遗憾的，在那里学生应该发展自信，不凭信仰接受任何东西。许多教师告诉我，“如果你过早地开始按键，推理能力似乎就会丧失。”

计算机储存和处理大量数据的能力，使得机关团体可以收集关于个人的信息。这可能是好事：止住超速行驶汽车的警察，可以立即查对这个司机的档案。也可能是坏事：一个团体可能收集关于某人的大量信息——购货模式，信用史，旅行记录等等——以致构成对隐私的侵犯。

每当我想到所有那些奇妙的节省体力和脑力的工业和电子革命中的发明，两个问题使我困惑。为什么我们大部分人仍然工作这样费劲，而且闲暇时间这么少？还有，我们比我们的父母和祖父母更愉快吗？我们是更舒服，而且处理日常家务也更容易，但是，哪一些“改进”实际上成了走向美好生活的障碍呢？什么是我们在不知不觉中付出的潜在代价，有朝一日我们可能会发现，当最后结算时，这些代价超过更惹人注意的，广告大肆宣扬的好处呢？

当我阅读我母亲1903年13岁在衣阿华州杜布克保存下来的日记时，我不禁想到这些问题。这里是典型的记载：“上学。

上小提琴课。傍晚去上钢琴课。练习。为起居室沙发靠垫绣花。”它使人联想起一种生活方式：处于必然王国的人们，越是自力更生，就越有更多时间探索和开发内在的资源。

我们会不会是在爬一个埃歇阶梯，以为是在一步一步往上走，结果，出乎我们意料，最终我们又回到了我们出发的地方，甚至更低？作为一个乐观主义者，我愿意认为这个答案是否定的。这个问题仍旧值得琢磨，不仅仅是对计算机。

第八章　发明之母

按照一条老的拉丁格言，“需要为发明之母，”但是，“好奇为发明之母”同样也是对的。正是好奇心，而不是需要，驱使迈克尔·法拉第在19世纪的早期探索电与磁。当被问到“所有这些有什么用？”他回答，“一个新生婴儿有什么用？”他没有想到我们这个时代的设备——电报，电话，电灯，收音机，电视，雷达，光盘。他受急于回答物理学，化学，生物学和数学共有的基本问题所驱动，这问题是，“我们寓居其中的宇宙的本性是什么？”或更一般地，“什么是真实的？”对这些问题的来之不易的回答，构成我们文明社会的财富，从而增加供我们选择的事物，扩大我们的行动能力，包括对我们有好处和对我们有伤害的能力。

很难，或许不可能，预言我们的行动，特别是新发现的长期效果。当IBM（公司）在1947年宣布晶体管的发明时，人们只是把它看作一个用于助听的装置，再无其他；他们肯定没

有把它看成是使计算机更小的关键。1949年，IBM估计全世界对计算机的需求将为15台机器所满足。当查尔斯·汤斯和阿瑟·肖劳1958年发明激光时，他们没有想到杂货店和图书馆的扫描器，光盘，精密测量仪器，眼外科或纤维光缆。

很多完全属于数学领域的发现，后来却在“现实世界”中有令人惊奇的应用。这些发现是由好奇心，由回答某问题的强烈要求，由探索未知所引起的。

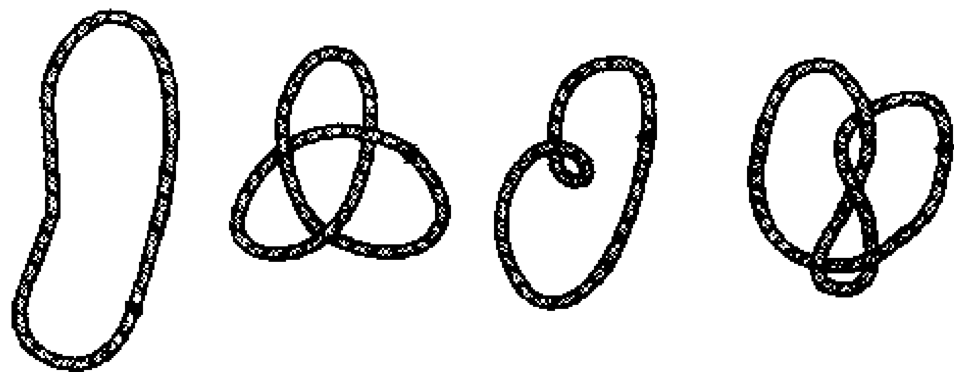
我将概略地叙述三个例子。为弄清细节，你可查阅书末的参考文献。

纽　结

在19世纪80年代，物理学家认为，光是在一种被称为以太的物质中传播。他们设想，以太充满空间每一个隐蔽冷僻的角落。人们猜测，原子只不过是以太作成的一个缠绕的纽结，不同的元素对应不同的纽结。

让我们暂停一会儿，先来描述数学家关于纽结的观点。

为作一个纽结，我们取一条线，将它随意缠纽然后将其两端粘在一起。下面是四个纽结的图形。



左边这个纽结，根本没有缠绕称为非纽。对第二个纽结，

不管你怎样扯动这条线，都不可能使它没有缠绕。它真的和非纽不同。乍一看来，第三个纽结好像也是缠绕了的，但稍微拉一下，就会使它没有缠绕，这说明它是一个乔装了的非纽。第四个图形展示另一个不能没有缠绕的纽结。而且可以证明，它和第二个纽结真的不同。

受物理学的激励，数学家们开始研究纽结。甚至在爱因斯坦指明不需要以太之后，他们仍然继续他们的研究。这是他们提出的基本问题："给定两个纽结图形，我们怎么能够知道它们是否实际上描写同一纽结？"经过一个世纪的工作，仍然没有判别的自动程序，但某些复杂的代数工具在一些特定情形下解决了这个问题。

如果有什么东西看来没有实际用处，谅必它就是纽结理论。但是，在80年代，这个理论却有助于分离DNA分子的化学物质。我们经常把它们想象为呈螺旋阶梯或螺旋线形状的这些分子，往往皱缩成纽结的形状。纽结理论帮助我们分析这些DNA形式的性质。最近，纽结理论又被应用于物理学的一个分支统计力学之中。

探 管

回到1917年，奥地利数学家约汉思·拉当（1887—1956）提出了一个表面看来毫无用处的问题，我将用水果蛋糕的语言予以描述。

一个水果蛋糕包含分散遍布于蛋糕内的樱桃，蜜饯菠萝，胡桃，葡萄干和桔皮。它是水果拌蛋糕的不幸结合，其所用的水果可能是上好的，蛋糕可能是可口的。撒入一点白兰地或朗姆酒为这个混合物防腐。它往往在圣诞节前后以礼物的形式出

现。因为礼物的接受者几乎无人喜欢水果蛋糕，它有时就被储存起来，并把它作为下一年的礼物送出去。因此，有些水果蛋糕可能有几百年的历史，它们被完好地保存在其中的酒精中，就像一个冰川时期的骤犁（北美洲的一种动物，念冲封——译注）保存在西伯利亚冻土带一样。

不管怎样，设想你要精确地了解每一种成分位于何处而不切开蛋糕。你可用一根细得像蛛丝一样的极其狭窄的空管穿过蛋糕。然后你再量量这个探管中收集的物质。设想你可以对每个可能的方向和水果蛋糕的每一部分这么作。拉当提出的问题是，“假如我准确地知道每一次探测的重量，我是否占有充分的资料，足以计算出每一种水果的位置并指出它是什么？”

桔皮是由一种非常轻的物质构成的。胡桃也是这样。一块菠萝较为稠密得多。即使它的大小可能跟胡桃一样，但它更重。它有较高的密度。假定蛋糕中每一种不同的水果有不同的密度，因而每一种水果可以等同于其说明问题的密度。

拉当证明，至少在理论上，只用每一个像针一样的探管的重量，他就可以间接计算出蛋糕里面有什么东西及其位置。如其论文的题目所指出的，“关于从函数在一些流形上的积分确定函数”，他没有考虑例如分析水果蛋糕之类的任何实际问题。浏览这篇论文，你会看到许多 x，y，以及大量微积分中使用的记号。顺便说一下，没有方法使得这样的探管不损坏蛋糕。他的整个研究只不过是想满足他自己的好奇心。

但是，几十年之后，拉当的发现却被应用于天文学，分子生物学，地球物理学，光学和医学。例如，计算机化的层面 x 光照相术（CT），可使医生看到病人的体内，而毋须求助于外

科手术。X 光束起着细空管的作用。光束通过病人时被吸收的数量起着管内所收重量的作用。数以千计的这种光束的数据，由一台计算机进行处理，以构作出一个横截面影像。这个过程需要如此大量的计算，以致只有电子计算机能够充分快地进行，才足以保证它们的任何应用。因为在拉当写那篇论文的时候，还没有电子计算机，他肯定不会预期到后来以“拉当变换”著称的那一工作的任何应用。再次证明，好奇为发明之母。

代 码

我的第三个例子来自数论，传统上它被认为是最少可能被应用的数学分支。正如 G.H. 哈代 1940 年所说，“还没有人发现数论能服务于任何军事目的……任何人似乎都极不可能如此作上许多年。”

我猜想，他要是知道下面这件事是会感到尴尬的。1977 年，三位数学家，R. 里维斯特，A. 夏米尔和 L. 艾德雷曼，应用数论发明了一种新的密码，发表在一篇题为“获得数字象征和公共字钥保密系统的一种方法”的文章中。这个代码不是他们的第一次尝试。里维斯特和夏米尔提出过 42 种代码，而艾德雷曼全都给破译了。但是他破译不了 43d。这种代码为银行和企业提供一种安全而秘密的传输信息的方法。它完全是军事的；联邦政府把发表代码和破解它的技术视为违反 1954 年军火管制条例。

我将仅仅描述代码据以建立的数论，详情请查参考文献。

首先回忆几个算术定义。自然数是数（shǔ）人或物的数，即 1，2，3，4……说一个自然数 D 能除尽另一个自然数 N，如

果有一个自然数 Q（称为“商”）使得 D 乘 Q 等于 N。例如，3 能除尽 12，因为 $3\times4=12$。如果 D 能除尽 N，那么我们也说 D 是“N 的一个因子”。作为一个例子，12 的因子是 1，2，3，4，6 和 12。

当 D 是 N 的一个因子时，我们也说“N 是 D 的一个倍数”。例如，3 的倍数是 3，6，9，12，15，…等等，以 3s 计数。当 N 是 D 的一个倍数时，我们也说“D 平稳地通向 N”——没有余数。

一个数恰好有两个因子，本身和 1，就被称为素数。前几个素数是 2，3，5，7，11，13，17，19 和 23。（注意，1 不是素数，因为它只有一个因子，即它本身。）

我们需要的下一个概念是“乘方”。如果 N 是一个自然数，我们将把 $N\times N$ 表示为 N^2，读作“N 的二次幂”或“N 平方”。类似地，把 $N\times N\times N$ 表示为 N^3，读作“N 的三次幂”或“N 立方”。更一般地说，如果 e 是一个自然数，我们把“e 个 N 的乘积”表示为 N^e，读作“N 的 e 次幂”。例如，

$$5^2=5\times5=25,\ 5^3=5\times5\times5=125,$$
$$5^4=5\times5\times5\times5=625。$$

18 世纪，欧拉发现了这些幂的一个值得注意的性质，下面说的是它的一个特殊情形。取出任意两个不同的素数 p 和 q；对任一自然数 N，作数

$$N^{(p-1)(q-1)+1}-N。$$

欧拉证明，这个数总是两个素数之积 $p\times q$ 的一个倍数。

为了便于理解，考虑一个最简单的情形：p 为 2，q 为 3。这时，欧拉断言，对任何自然数 N，

$$N^{(2-1)(3-1)+1}-N$$

是 2×3 的一个倍数。这就相当于断言，对于自然数 N 的每一种选法，

$$N^3-N$$

都是 6 的倍数。当 N（比如说）为 4 时我们来检验这个断言。在这种情况下，N^3-N 成为 4^3-4，它就是 64－4，或 60。正如欧拉所预言的，60 确实是 6 的一个倍数。你也可以对 N 的其他选取，例如 1，2，3，5，很容易地加以检验。你可能还想要对另一对素数例如 3 和 5，来检验欧拉的结论。如果你用更大的数，计算将会十分繁重，即使用计算器也不轻松。

欧拉定会感到惊奇，如果他知道，他关于一个确定的数是两个已知素数之积的一个倍数的结论，在两个世纪之后，竟成为密码的基础。

为使用代码，一个银行（比如说）选取两个大的素数 p 和 q。我指的是，阶为 75 位数字长。然后，银行计算出它们的乘积 p×q，长约 150 位数字，并把这个被称之为字钥的乘积供它的顾客享用。但是，它不公开那两个素数是什么。（马丁·赫尔曼在《科学美国人》1979 年 8 月号上的一篇文章中，说明了如何使用字钥编码。）

一个侦探为了破译这个代码，必须找到两个素数，其乘积为那个长长的字钥。这就意味着要找一个 150 位数的因子。须知，要找 12 的因子，手算几秒钟便可获得，但要找一个很大的数的因子，最快的计算机也需要很长的时间。为对这个困难有所感受，试求乘积为 1739 的两个素数；1739 是个相当小的数。然后，设想一下求一个 150 位数的因子的困难，它不是一

个吸引人的前景。

1977年，人们猜想，一个150位数定会大到足以隐蔽它的两个素数因子达几个世纪之久。在那年，《科学美国人》发布了一条基于一个129位数字钥的简短信息，并悬赏100美元，给译解出该信息，大体上也就是找出该发布数的两个素数因子的人。

若干年过去了，没有任何人译解出该信息。1990年，三位代码发明者创办的RSA数据保安公司，发布了几个更小的挑战性字钥，其中三个最小的各有100，110和120个数字。数学家们设法寻找它们的因子，但直到1994年，那个129位数字的字钥，经受住了所有的攻击。那一年，24个国家的600位志愿者，每人操作一至数台个人计算机，合作八个多月，揭露了这两个素数因子。（如果这600位志愿者以每秒一次运算的速率进行手算，那会需要500万年才能译出。）顺便说一下，译解出的信息几乎毫无意义；它是“不可思议的语言是神经质的秃鹰”。这个团体把奖金捐赠给了免费分发软件程序的免费软件基金会。

目前，基于150位数的代码似乎仍然是安全的。但是，随着计算机变得越来越快，随着更快速的因数分解新方法的发明，即使这样的数也可能还不够大。

这三个例子——纽结，拉当变换和欧拉定理——表明，为满足好奇心而作的数学日后可能获得实际应用。为了加强说服力，例子的列举可以一页一页地继续下去，但我只再提两个。早在19世纪初就已成为数学的一个公认部分的复数，在这个世纪末是分析交流电的理想工具。19世纪引进的一种几何学，

结果恰好是20世纪初爱因斯坦为表述他的广义相对论所需要的数学。

好了，不必再举例了，因为前面三个例子已经证明我的观点："好奇为成功之母。"数学家研究数学，可能是因为他们感到一些问题引人入胜，一些发现出人意料，深刻，永恒而美妙。社会支持他们，是因为那些发现往往会有包括发现者在内谁也不能预见的巨大的实用价值。

第九章 说实在的，工作是什么?

当报刊大字标题登出"军事基地关闭"，"关于航行的禁令"，"企业合并"，"计划中的赌场"，"需要新监狱"，"烟草高税"，或"牧师为减少圣诞节购物辩解"时，头一个想到的问题是什么？回答：这会创造或毁掉多少工作（岗位）？通常，报道的第一或第二段会提供这些数字。

对于工作的这种优先关心，有一个很好的理由。没有工作的那些人担心找不到工作；有工作的那些人担心丢掉工作。如果你正想着怎样把面包摆在桌上，那就很难全神贯注于数学的真实和美妙。由于这个原因，下一章将考察在许多谋生手段中数所起的（或不起）作用。

但是，首先让我们停下来简短地分析一下工作这个概念。

像水是由氢和氧构成一样确实，工作是由独立的性质截然不同的两个方面，即生产岗位和收入岗位所构成。每个人都需要有一个收入岗位，以便能够购买生活必需品和奢侈品。对于

个人来说，这是工作的关键部分。社会作为一个整体需要一定数量的生产岗位，以便提供那些商品和服务。没有任何理由要求所需收入岗位的数目恰好等于所需生产岗位的数目。（试把这同男性数目和女性数目的平衡相对比，后者是由碰巧有一个X染色体或Y染色体传递给下一代而保持的。）实际上，在两个世纪的工业革命和一个世纪的电子革命之后，随着无数节省体力和脑力的发明，如果仍有足够分配的生产岗位，那是出人意料的。在西欧至少11%和在美国至少6%的持久的失业率表明，发达国家将经历不平衡状态。国际劳工组织估计，全球范围内“几乎三分之一的工人——或30亿中的8亿2千万人——或是没有工作，或是只有部分时间工作。”

只要我们把工作想成一个单一的不可分割的单元，我们就是有缺陷的，就像一个不知道水由两个元素构成的化学家一样。当我们为工作担心时，我们实际上是为缺少收入岗位担心。

收入岗位的大小（挣钱多少）和生产岗位的价值（生产什么）之间可能几乎没有关系。例如，一个教育青年或照顾老人的人，占有一个小的收入岗位，但是一个关键的生产岗位。另一方面，一个卷烟公司的总经理，可能占有一个巨大的收入岗位，但根据卫生局医务主任所说，这个生产岗位一天杀死1 000名美国人。你或许已经注意到许多这样令人困惑的反差。

一个收入岗位甚至可能没有相关的生产岗位——例如，一个福利接受者或一个家产继承人。类似地，一个生产岗位可能没有相关的收入岗位——例如，一个医院的志愿者或一个博物馆的义务讲解员。犹他州西约旦的布里亚人是一个特殊的例

子；他们为几百条被人抛弃的狗找到了良好的家园而不用花钱。《新闻周刊》和哥伦比亚广播公司注意到一些很不显眼的人们，他们占有有价值的生产岗位，但没有或只有小的收入岗位。正如《新闻周刊》的社长所写的那样，“为什么只有影星和其他著名人士才被认为值得公众注意？授一个奖表彰帮助了社会上其他人们或完成了未事宣扬的英雄主义行为的普通美国人怎么样？”讲得对。

逐步缩短工作周有助于保持两类岗位之间的大致平衡。但是，如果一个国家意识不到存在一个基本的不平衡，它就可能不去设法予以消除。它可能要留待新发明，新的风尚和娱乐，或者强大的广告宣传——所有这些都刺激经济发展——创造足够多的生产岗位以适应需要。这种漫无计划的办法，依赖于一只“无形的手”的运作，很难达到预期效果。难怪对工作的关心是如此地盛行。

下一章详细描述美国的生产岗位和每一类型的工人数量。当我们想知道“谁需要什么样的数学？”之时，这可能会有助于我们站稳脚跟。

第十章　我能从中找到什么？

无论是在家，或是在工作场所，想过幸福高效的生活，而不用做两个分数的加法或是摆弄一个代数方程，那是不可能的。我不打算断言，为了获得一份好的工作，每个人都必须学微积分。我不会试图劝说任何人成为一个数学家。我所要做

的，只是描述各种特定行业所需要的数学水平，以及在这一行业中工作的人数。我不打算预言，哪些行业将会扩充，哪些将会收缩，哪些将会需要更多的数学，哪些会少。未来是难以预言的，我将把这一任务留给劳动统计局发布的《职业展望季刊》及其调查报告“美国劳动力：1992—2005。”

暂时搁下工作不说，而来考虑这样一个问题：“一个人需要什么样的数学技能来应付日常生活？”假如你有一位朋友，一位配偶，或一位会计为你作所有的计算，那么你自己就不需要作任何计算。但是，如果你不想每次当你把处方药分成两半，或者计算一张信用卡上18%的利息是多少时都大声求助，或者你想要能够辨认你的计算器是否显示了一个荒谬的答案，那么，处理分数和百分比的技能就是必须的。而且，正如我将指出的，这种水平的数学专长，就是大部分工作所需要的全部。

但是，当我们看到计算机正潜人到我们生活的每个角落时，我们很可能会怀疑，是否甚至对算术的需要也将消失。激光器扫描柜台的代码，计算机登录顾客付款数量并处理余下的事情，甚至包括销售税和找零，硬币自动下落到一个斜槽内。

可是，如果计算机突然发生故障，或者，如果为计算机编制程序的人登录了错误的价格，会发生什么事呢？我曾看到，在这样的不幸事件中，出纳员无能为力。

虽然大部分工作只用到使得一个人能应付日常生活的算术，但我不打算建议人们在6年级停止学习数学。我主张向大范围的机遇开门，并尽可能长久地继续开下去，而不主张关门。许多工资较高而重复性较少的行业确实需要超出算术范围

的数学。

有时，对数学的要求是无形的，间接的。例如，萨克拉门托市学院开办的许多两年制的职业班，要求学生通过一个代数考试才能毕业。加利福尼亚大学准许入学的前提之一是具有 3 年的中学数学基础，而且学生们“被强烈地建议在中学的每一年选学大学预备数学”。或者，一个法学院可能建议潜在申请人学习“数学和逻辑”，以及自然学科和人文学科的其他领域。

有时，数学要求虽然说得清楚，但仍可能带来惊奇。在萨克拉门托市学院，电子方面的学生必须学两年代数和三角；一个未来的护士必须学一年代数。加利福尼亚大学某些主修心理学的学生必须学一年微积分。

根据路易斯·哈里斯及其同事们所作的一次民意测验，“许多中学生在决定是否继续他们的数学学习时，很少或没有来自父母，老师或学校顾问的指导。在打算尽早停止学习数学的学生中有超过三分之一的人，想在大学里学习自然科学。这种怪事在少数民族中尤为强烈。

再者，学习一门课程往往不足以掌握它。为达到掌握，有两种可靠的方法：一是教，甚至作一名指导教师；二是选修要应用它的后继课。代数有助于复习算术，三角使几何更明白，而解析几何则同时加强代数和三角。微积分不仅复习所有这些课程，并把它们拴在一起，而且提供更广泛的应用。

当我认识的一位工程师雇用一个助手来帮助作某些计算时，使我想起补充后继课的价值。他曾在求助广告中向应聘者提出“两年大学，包括一年微积分”的要求。

“他们真的要用微积分吗？”我问。

"不，但那样我就能肯定他们懂三角。他们将会要作大量的三角计算。"

他指出，大部分工程师在他们的工作中不用微积分。当他们在大学中想要弄懂为他们的工程学习奠定基础的物理和化学课程时，他们需要微积分。

《纽约时报》的一篇文章，"跟着职业母亲亦步亦趋"，提到了一位13岁女孩的事例，她正同她的母亲，J.P. 摩尔根公司的一位董事长，讨论代数的重要性。"在我的职业中，我从未打算使用代数"。她的母亲显示了一个V，作为胜利的象征，很高兴，她的女儿"完全接受了有职业就是一种赐予的观点"。我希望这个V并不表示不需要代数。如果这位女孩想追随她母亲的脚步，她就可能在大学里选择主修工商管理或经济学。如果是这样，她会大吃一惊：两者通常都要求一年的微积分——而且迅速准确地演算代数的技能是掌握和享用微积分的关键之一。那么，如果她决定成为一名医生，又会怎样呢？也是一年的微积分。

我的意思不是说，每个人都要学习微积分。正如我们将会看到的，在1.21亿劳动者中，只有400万人在他们的职业生涯中在某方面需要微积分，即使他们可能在工作中不使用它。

要想找出什么行业需要什么样的数学，最好的途径是什么？这正是当我考虑写这一章时所面临的问题。我肯定不打算对随机挑选的成千上万劳动者进行民意测验。幸好，我不是考虑这个问题的第一人。

哈尔·桑德的书《我们何时会用这个?》，列举了100个行业中使用的数学。他向人们询问"在大约60个数学主题中他

们使用过哪些，以及如何使用。"例如，他发现32个行业使用毕达哥拉斯定理。总括桑德所集数据的广告牌，应该在每个教数学的教室里陈列。对数学的重要性而言，它是一个快速而令人信服的例证。

但是，我想描述包括所有行业的全貌。为此，我查了"劳动考察大全"，其中列举了12 000多个行业的要求。为了弄清有多少人受雇于每个行业，我不得不查看一个不同的资料，"美国劳动力：1992—2005，"它把劳动力分为大约500个类型。然后，我又不得不对这两个来源的数据加以整理，因为它们往往使用不同的组合和标题。

"行业名称词典"列举了20 000多种工作，有助于综合这两份资料。当我阅读它时，我对支撑现代经济所需职业的多样性和复杂性感到惊奇。我闲着玩似的浏览索引，试图猜出一些工作名称的意义，例如"拈接落纱工"，"工头群体监管人"，"马戏团场地工"，"长链卷轴机操作工"，"花纹缝制工"，"细菌干燥工"，"流化工"和"瓶屋司泵工"。

"行业考察大全"是围绕诸如艺术和科学等12个主要兴趣领域来编排的。它把这些领域分为66个工类，然后再分为348个子类；这些子类又分为12 000多个行业。对每一个行业，它列举了所需要的阅读，语言和数学发挥水平。我只查看数学要求，它被分为6个级别，从1到6，6最高。它们是：

1级　加减两位数。以2，3，4，5去乘和除10与100。对作为一元的若干分之一的辅币进行四则运算。用杯，品脱，夸脱（均容量单位——译注）；时，呎，码（长度单位——译注），和盎司，磅（重量单位——译注）进行运算。

2级 用分数和小数作计算。计算比，比率，百分比，描绘和解释条线图（一种统计图表——译注）。

3级 计算利息，折扣，利润，亏损，佣金，价格增长额，比，比例，百分比。求面积和体积。代数方面，用变量和公式，多项式，平方根，根作计算。几何方面，利用平面和立体图形，角的性质，以及两角之间的关系进行工作。

4级 代数方面，处理基本函数（线性和二次函数），方程的解答和不等式。用对数函数，三角函数和反函数，极限和连续性，概率论和统计推断进行工作。几何方面，公理化方法，平面和立体，坐标。商业数学方面，分数，百分比，比和比例的实际应用，测量，代数，几何构造，三角。

5级 代数方面，应用指数和对数，数学归纳法，二项式定理，排列作计算。微积分方面，代数函数的微分与积分。统计学方面，频率分布，正态曲线，方差分析，相关，x^2，抽样论，因子分析。

6级 高等微积分方面，极限，连续性，隐函数定理，微分方程，无穷级数，复变量。现代代数方面，群，环，域，线性代数。统计学方面，试验设计，统计推断，计量经济学。

为方便起见，我将把这些级别转述为我认为大致相应的课程。

1级： 算术入门（4年级）

2级： 分数和小数（6年级）

3级： 工商算术，某些代数（第一年的代数）

4级： 代数，三角，几何（第二年的代数，一个学期的三角，一年的几何）

5级： 某些分析，微积分，统计学（一年的微积分，一个学期的统计学）

6级： 大学水平数学大纲的核心（三年的微积分，一个学期的抽象代数，一个学期的统计学）

正如我早先指出的，2级相当于日常生活中有用的算术。只是到3级，代数方才登场。这个水平对于有些行业是重要的，在那些行业里，劳动者可能要处理用符号表示的公式，或者可能要解简单的方程。4级接近于加利福尼亚的入学要求。中学的全部课程通常能使学生达到4或5级。粗略地说，5级是主修生物学，医科大学预科，或经济学者的数学，而6级对应于主修专业为物理学，工程或数学。

三角出现在4级中，而微积分出现在5级中。我想就三角和微积分这两个术语说几句话。这两个词吓倒一些人，甚至包括一些准备主修数学的人。三角只不过是“三个角度测量”的希腊语，而微积分是曾经一度在计算中使用过的“卵石”的拉丁语。或许，重新给它们命名为“三个角度测量”和“卵石”，可能除掉它们的神秘色彩。任何学生，只要他们通过充分的实习，已经把他们的代数技能锤炼到了快速准确的境地，他们就会发现，这些后继课程是完全可以弄懂的——是自然紧接的步骤。每年约有100 000中学生参加提前安排的微积分考试，约有750 000大学生学习微积分课程。所以，“卵石”不是很神秘的。

通观“大全”，我注意到了联系于各种职业的数学水平。对348个子类中的每一个子类，甚至在66类的一部分中，都有与之相联系的数学水平。我把这些总括在约70个类型之中，

这些类型接近于“美国劳动力”中的标题。下面的表就是我的结果，它为数学在工作岗位的作用提供一个概貌。对于本表中找不到的某一特定行业的更特殊的信息，我请你参考我使用的两个资料来源和“职业名称词典”。书末的关于进一步阅读的建议部分，列举了另外一些有关劳动领域的向导，其中有的只包括一个城市，有的描述工资，而其余的则是关于劳动环境的评论。我对能够得到的建议，向导和信息的数量感到惊讶。一个信息快车道已经直通我们的生活。它是由论文做成的。

顺便说一句，别对每个数字都那么认真，而宁可把它看成一个大概的估计。我给出的人数来自劳动统计局，基于雇主提供的资料。人口统计局使用 60 000 个家庭的调查材料，也对人数作了相似的估计。两方面的数字从不一致，但它们往往十分接近。顺便提一下，1992 年的劳动力总数大约是 1.21 亿。

行业	人数	数学水平
国家行政部门，行政管理，经营管理	15 000 000	
经理，行政管理人员，国家行政部门官员（财政金融，建筑建设，饮食服务，房屋出租，教育，地产等方面）	11 000 000	4
经营管理辅助人员（会计，审计师，价值评估师，税务员，借贷员等）	4 000 000	4
专业人员	17 000 000	

续表

行　　　　　　业	人　数	数学水平
工程师	1 700 000	6
建筑师，勘测员，生命科学家	400 000	5
计算机，数学，运筹学系统 （保险公司统计员，系统分析师， 统计学家等）	800 000	6
物理科学家 （化学家，物理学家，气象学家， 地质学家等）	400 000	6
社会科学家 （经济学家，心理学家，城市规划师等）	400 000	5
社会，娱乐，宗教工作者 （牧师，人道服务，娱乐业等）	1 100 000	4
律师和司法工作者	800 000	4
教师（数学和自然科学教师除外）		
学前至6年级	3 300 000	2－4
特殊教育	62 000	2－4
中学	620 000	4
中学以上	780 000	4
其他（成人教育，职业教育等）	1 300 000	3
图书馆员（馆长，图书复位员）	230 000	3
顾问	240 000	3
医疗诊断（内科医生，牙科医生等）	880 000	5
健康评估和治疗		

续表

行业	人数	数学水平
（正式护士，治疗师，药剂师等）	2 500 000	3-4
作家，艺术家，表演者（舞蹈演员，运动员，设计员等）	2 100 000	1-2
技术人员及相关辅助人员	4 400 000	
医疗和工程技术人员和技术专家（获得许可证的有实践经验的护士，电气技术员等）	2 800 000	3-4
其他技术人员（计算机程序设计员，飞机驾驶员，法律助手等）	1 600 000	3-4
营销	14 000 000	
出纳员	2 900 000	2-3
售货员（零售）	3 900 000	2-3
营销主管	3 700 000	2
其他销售（保险，房地产等）	3 500 000	3
行政管理辅助人员（包括办事员）	20 000 000	
信息员（接待员，旅馆服务台，售票代理人等）	1 600 000	2
协调员，调研员，收款员	1 200 000	2
存货管理员	1 800 000	2
交通，水运，接待人员	820 000	2
簿记，会计，审计员	2 100 000	2
秘书，速记员，打字员	4 200 000	2
一般的办公室职员	2 700 000	2

续表

行 业	人 数	数学水平
银行出纳员	530 000	3
办事员主管和经理	1 300 000	2
其他行政管理辅助人员和办事员	400 000	2
服务	16 000 000	
看门人，清洁工，杂务管理	3 300 000	1－2
男女侍者	1 800 000	1－2
食品柜台，饮水处及相关人员	1 600 000	1
其他食品制备与服务	1 300 000	2
护理与精神病援助	1 400 000	2
其他保健服务	650 000	2
个人服务（看小孩，美容师，家庭保健援助等）	2 300 000	2
私家家务劳动者	870 000	2
消防	310 000	2
法律执行	980 000	2－3
保卫	880 000	1－2
其他保护性服务	230 000	2
所有其他服务	500 000	2
农业，林业，渔业及相关行业	3 100 000	
园林工人和公园公墓等用地管理人	880 000	2
农场经营与管理	1 200 000	2
农场工人	850 000	1－2

续表

行业	人数	数学水平
其他	170 000	2
精密，制造，工艺和维修	14 000 000	
建筑业（木工，电工，管道工等）	5 300 000	3
机械管理与维修	270 000	3 - 4
车辆与机动装备机械工及维修工（小汽车，公共汽车，卡车，飞机等）	1 900 000	3 - 4
电气与电子设备维修	630 000	3 - 4
其他机械工，安装工，维修工	1 400 000	3
印刷工，纺织工，精密木工	500 000	2
精密制品（金属制造工，装配工等）	500 000	2
操作工，装配工，劳工	19 000 000	
数值管理，机具操作，金属装配和加工，塑料制模等	2 000 000	4
印刷，装订，纺织，木工机械操作等	3 300 000	1
手工工人（电子装配工，焊接工，罐头食品工等）	2 500 000	1
卡车司机	2 900 000	1 - 2
公共汽车司机	650 000	2
其他运输和物质般运	1 600 000	2
手工援助者，劳工和其他物质搬运工	5 200 000	1

扫一眼这张表就会使人产生如下一些看法。在总数为1.21亿的劳动力中，大约400万人是在数学水平为5或6级，要求微积分的行业中。他们只占劳动力的3%。另一方面，大约8000万人，仅以1或2级，即算术谋生。他们约占劳工数的三分之二。

随着经济的越来越复杂，随着计算机和机器人担负更大的任务，劳动力需要的数学是更多了，还是更少了呢？两方面的论证都有。我把这一问题留给《职业展望季刊》，它是劳动统计局为预报职业趋向而发布的。不管怎样，学生们正趋向于比往年更多地学习数学。按照全国教育统计中心1994年发表的“教育状况”，并根据教育部的资料，1992年中学毕业生中的56%学过两年代数。10年前，这个数字仅为37%。在1992年，70%学过几何；10年前是48%。这就是说，在1992年，超过半数的中学毕业生大体上达到了数学4级。

根据实际经验来看，一个行业的收入与受教育的程度有关，进而通常又与数学水平有关。但是，收入只是选择职业的一个因素。有些人可能想在室外工作。有些人可能想找一个白领阶层的工作，上班时间可以离开，因而时间和精力可以用于其他感兴趣的事情。总之，事情是明显的，一个人懂得的数学越多，供他选择的机会也就越多。

大学生们常跟我说，“我喜欢数学。我若获得一个数学方面的学位，能做什么呢？就是教数学？”根据在校园里我所注意到的，大约半数获得数学方面学士学位的毕业生，确实教书去了。但其余的一半，数学水平都是6级，有广泛的选择范围。一些人成为保险公司统计员，系统分析家，营销专家，网

络管理人，金融分析家等等。一位成为好莱坞滑稽作家。其他人发现，他们的本科训练是通向诸如医学和法律等专业的跳板。

一位曾经主修数学的内科医生阿瑟·斯特丹写道，“数学打开了通向最好的医学院的大门。分析思维过程的训练，为我在医学院的学习做了非常好的准备。在医学中，人们面临的是这样的问题，在找到解决方法之前，必须对它进行透彻地分析。这个过程和作数学是相似的。”

另一位数学主修者，后来成为一名律师的乔纳森·布莱特马赫抱有相似的观点。“虽然我没有法律方面的基本知识——甚至没学过一门政治课——但我在一个最好的法学院学习很顺利。我把我的成功大部分归因于，在那里通过数学特别是定理的学习，使我学会了如何分析复杂的原理。学过数学的律师能以一种大部分其他律师不能的方式把握法学原理。”

布莱特马赫不是第一位注意到这种现象的人。托马斯·杰斐逊在 1765 年前后给他的一位同学的信中写道，“数学在最熟悉的日常生活中是如此地有用，又是如此地特别招人喜爱和令人愉悦，以致诱使每个人都愿意和它交往。此外，像身体的各个器官一样，大脑的功能也因练习而加强和改善。所以，数学推理和演绎是法学的最好准备。”

在每年获得学士学位的 120 万人中，仅有大约 1.2 万，或者说 1%，是数学方面的。显然，这 1.2 万名学生，即使不继续他们在研究生院的学习，也有多方面的选择自由。欣赏数学的美妙与精确的学生们，可以在大学里专攻数学，而后把它用于更世俗的谋生目的。简单地说，他们可能拥有两个领域——

美学和实用——的最好境界。通过学习数学，他们显示自己能进行持续地连锁推理。他们的主修专业结合一点儿计算机科学，统计学，物理学和生物学，使他们在找工作时，处于灵活机动的位置。

或许，最好的总结是引用《职业展望季刊》：

> 假如求职目标已经确立，那么要学多少中学数学是容易决定的。但是，选修似乎太多的数学比太少好。职业计划发生变化，在接受新的教育或训练目标时最大的绊脚石之一就是数学准备太差。而且，掌握数学较多的人不仅适合于更多的工作，他们也能更好地完成自己的任务。

第十一章　行动本能

第十二章将对近百年来尝试改革数学教学的历史提供一个快速的概观。但是，为了解这些改革，或许为了解任何改革，我们必须首先讨论行动本能。

行动本能帮助一个人克服行动的压力。它把多种选择最终归结为一种。它使行动的实施者，即行动者，投入到这种选择，排除疑问，支持奉献。不论这个行动是明智还是愚蠢，行动本能使行动者能集中精力于目标的追求。

本能是对挑战的自动反应，它帮助人行动，而驱走恐惧与犹豫。它使一个半心半意或三心二意的人转变为一个一心一意

的行动者。

行动本能，一种自我催眠术，对于完成一个持久的行动是必要的。原先，它可能只是作为一种生存机制，用于当决定涉及到是追击，是隐蔽，还是逃离，而犹豫就意味着死亡之时。但是，即使在现代社会，它也是紧要的，因为它助成从犹豫不决到决定，从迟疑“我想我将做此事”到肯定“我将做此事”的转变。投入和行动本能是不可分的。

本能使大脑偏向某种选择，就像磁场使铁屑成行排列一样。这种偏向是用顽固或坚持，拒绝或奉献，偏执或坚韧之类的词来描述的，其选取取决于你是反对还是赞同这一行动。

一个人一旦到了投入的时刻，就不会去权衡得失，不会设想所有的陷阱，不会考虑别的选择。但是，一个思想者要成为一个行动者，必须固定一条行动路线，否则就将一事无成。行动本能使这种转换得以出现——从观察者到行动者——就像一个幼虫变为蝴蝶一样真实。

在公元前5世纪的波斯国王泽克西斯和他的顾问阿塔班勒斯之间的一次对话，揭示出行动本能的作用，就像希罗多德所转述的那样：

阿塔班勒斯说道，“人们，当他们听取意见，设想所有可能的不利时，还是小心为妙，但当行动的时刻到来时，则大胆应时为佳。”

泽克西斯答道，“并非所有的事物都同样可怕，也不必盘算每一种风险。因为，如果对来到我们面前的每一件事情，你都要照顾到所有可能的偶然性，那

你将永远一无所得。成功伴随着大胆行动的人们，而不是谨小慎微的人们。只有敢冒大的风险，才能征服大帝国。"

一个健身者能够体验行动本能的力量。正如小约翰·李·布朗所提出的，"人的头脑有两部分——有意识的和下意识的。有意识的头脑可以作判断和评估。如果它看出某事是不可能的，它会告诉你。但是，一旦你告诉了你的下意识头脑某件事，它就会听你的话，使那件事发生。我告诉我的头脑，我能做我想要做的任何事，我真的就能。"

从中立转变为投入的时刻，标志着一个关键性的变化，而且它是很难理解的。弗洛依德接触到了这个问题。他写道，"当作一个不甚重要的决定时，我总感觉较为有利的还是考虑所有正反两方面的情况。但是，在生死攸关的事情中，这个决定应当来自无意识，来自我们自身的某个地方。在有关我们个人生活中的重大决定中，我们应该由我们本性的深邃内在需要来控制。"

肯尼迪总统更直接地面对这一突破，承认"最终决定的本质对于奉行者——实际上，经常对于决策者本人——是费解的。……在决策过程中，总会有一个隐秘而错综复杂的阶段——甚至对那些可能最为密切相关的人们都是神秘莫测的。"

一旦行动开始，行动本能支撑着行动者。每一个障碍加强而不是减弱决心，所以，受使命感的推动，行动者继续坚持，不管他是一个探险家，一个发明家，还是一个数学教育改革家。大陆航空公司董事长在结束低费服务时谈到了这一现象，

“它是作为一个试验项目开始的，在被推广之前应该被证明是有效的。但是，一旦此事开始运转，它就很难改变。”

没有什么能像信服的力量如此有说服力。不能信服自己的人肯定不能信服任何他人。所以，行动本能使行动者能将别人引向目标。

当我们回顾数学教学改革的历史时，不要忘记行动本能。它将有助于了解过去，或者甚至引导我们走向未来。

第十二章 历次改革而今何在?

贯穿本世纪的一场关于数学应当如何教的战斗激烈地进行着。一方强调计算技能，而另一方强调理解力。钟摆来来往往地摆动——从“回到基础”到“新数学”和“问题解答”——未能和平妥协地解决。当学校当局即将选择一门新数学课时，这场战斗经常充斥于报纸的“函致编者”栏目。只有试图封禁学校图书馆的某一本书或解散足球队，才能唤起这样强烈的激情。

或许，如果数学是以理想的方式来教，一个班只有一个学生，这场争论可能根本不会发生。当我学习油画并请一位艺术专业学生卡提教我基础时，我体会到了“一师一生”教学的优越性。她迅即让我铺开画布，把颜料挤到调色板上，拿起画笔。“好了，你想画什么?”她问。我带了一张穿过森林通向湖边的小路照片。“很好”，她鼓励我，“干吧。”事情就是那样简单。当我试验性地把颜料涂在画布上时，我们讨论了颜料选择

与目标。这样一来，我就学会了。

这是数学教育的一种方法，它适用于作为“学徒”的每个学生。在这种情况下，教师知道学生的根基、兴趣以及适当的动力。但是，经济规律排斥这种方法。实际上，一位中学数学教师通常要和150名学生打交道，相当于每个学生一周约一刻钟，几乎没有时间进行交谈。一位小学教师面对约30名学生的一个班。把它分为若干小组，在小组中学生可以互相交谈，这至少有助于保持人情氛围。

一位教师应对几个小组，而不是一些个人，对所有课程都有影响，不只是数学。但是，在公众的眼中，数学实际上是学校的同义语。我猜想，假如你问大多数人，在与学校不经意的联系中首先想到什么课程，那定会是数学。毕竟，数学是最引人注意的科目，从幼儿园到12年级，年复一年地见到它。而且，它是一个累积的结构；例如，百分比依赖于分数，而分数又依赖于整数的算术。这就意味着，没有弄懂一个关键思想的学生，可能要在若干年之后承担后果。（甚至在螺旋式课程设置中，不断循环地回到早先的概念，这种情况也能发生。）

于是，难怪在对一个关于保持学校宁静的宪法修正案的辩论中，一部动画片展示出一个教堂内部，牧师说道，“除了学校中的祈祷外，政府已经明令我们把剩下的时间都安排做数学题。”不是拼写，不是文法，不是历史，而是数学。一封致编者的信提出，“任何人，要是他认为学校里没有祈祷，他永远不会去参加数学考试。”所有其他科目的考试都那么容易吗?

我回想起一位教育学教授，她有一个嗜好，专爱引用从数学方面挑选出来的例子，来说明差劲的教学。一天，恰好有一

位数学专业的学生听她的课，问道，“别的方面没有差劲的教学吗?”这个问题改掉了她的习惯。

或许，数学方面差劲的教学比其他方面更为多见，因为在数学学习中，任何混乱不清都很容易查出：答案通常非对即错。由于这个原因，我们希望找到数学教学方法中长期令人不满之处。如果你浏览一下主要的数学教学杂志《数学教师》，你会发现经常不断的哀叹；让我们回溯到1908年它的第一卷，其中，一位教师写道，“关于我校数学，一个最明显的事实是，普遍地不满意。”1911年的语调甚至令人更不愉快，“我们的会议充满阴郁。我参加过多次葬礼，但是我不记得有比这更悲伤的场面。我们失败了，我们的学生没有得到有价值的任何东西。”

年复一年，《数学教师》上的抱怨持续着。我要往前跳到1958年，那时我们读到“传统的课程是毫无意义的，而现代主义者们正在进一步脱离现实，迈向抽象数学。”这是对于发展后来称之为“新数学”的那帮人的早期警告。其后，关于那样的改革，议论颇多。但是，1994年，芝加哥大学的学校数学计划抱怨，“今天的学生仍然面对一百年前为小学生设计的小学课程的变种。”

在《数学教师》中，人们会发现许多对这种不满意的似乎可信的解释：太多的常规计算，计算器和计算机不够用，用得太多。特别，对数学作为一种艺术，作为文化的一部分，注意不够。有人常常责备备课不好的老师，正如1910年一篇典型的抱怨文章所说，“所有现代物质设备代替不了能干的教师，最优秀的教科书也代替不了生动的语言。”

作为最后一种手段，责备父母或整个社会，正如选自

1911 年的这个摘录所作的那样。它指向“现代生活的狂躁。狂躁的根源之一是太多的美国父母的溺爱，以及同学校的很少合作。”直到 1992 年，没有丝毫变化，当时我们听到，“在美国能够开始富有意义的教育改革之前，我们美国人必须确定，我们对我们的学生有何期望。我们是把高价值放在科学成就上？还是定个别的目标，例如声望卓著，或是一位好运动员，一位高级特权人物？”

作为对这些批评的回答，20 世纪经历了为数众多的改革——有的规模很小，只是一个样板课程，别的则是在学校范围内或按不同水平进行，少数大到一个城市，一个州，或者全国。这些改革风起云涌，也不管是否与问题的目标一致。有如一位医生坚持不断供给病人以各种各样的药丸，却不知道他生的是什么病。

像钟摆一样，从一个不可思议的解决方案到另一个来回摆动，每 10 年换一个名：50 年代叫“回到基础”；60 年代叫“新数学”；70 年代叫“回到基础”；80 年代叫“问题解答”；90 年代叫“集体学习”。什么样的改革能够激起波浪，主要取决于能说会道的虔诚的演说者愿意和能够在各种会议上传播改革的福音的激情，或取决于能否从基金会或政府获得资助。某人深信，他或她找到了成功数学教育的钥匙。于是，行动本能承接过来：“没有什么比可信的预言家更具说服力。”回顾早年的改革，我得到这样一个印象：预言家们常常是重新发明了扁平的轮胎。

写于 1909 年的关于改革的警示至今仍然适用：“要发动一场改革，需要足够的精力以克服习惯的惰性。数学教学的历史

昭示出一系列的从一个重点到另一个重点的来回摇摆，而且所有的改革都带来大量的东西，终因毫无价值而被弃置一边。一些改革者对当前的任何事物都几乎视而不见或者看不上眼，而认为一切都应予以推翻，一个全新的局势应建立在新的基础之上。真正的改革很少，如果有，就是以这种方式出现。”

我将牢记这些话，而来描述四次改革，一次小，一次中等，大的一次提出了新数学，以及最后，现代特大的一次，其拥护者称之为“标准”，而反对者称之为“新的新数学”。

1929年，纽约州伊萨卡的督学请他的督学同事们看什么课可以从课程表中拿掉，以便腾出时间给新指定的课程，“例如安全，卫生和健身指导”。新罕布什尔州曼彻斯特的督学L·P·本内泽特响应了这一挑战，回复道，“让儿童花8年时间学普通算术，简直是胡闹。整个课程可以后延到7年级开始，任何一个正常的学生在两年之内可以掌握它。”

本内泽特已经受到批评，因为他实际上取消了前两个年级的所有算术。但是，他觉得，如果他的信“表达了我真实的信念，如果我不把它付诸实践，那就是我工作上的失败。”于是，他进行了为期数年的实验；在1935和1936年的《全国教育学会杂志》上，他以三篇长文对此作了报导。

他知道，他能指望孩子们和老师们的合作。但是，孩子们的父母会怎样呢？有多少父母会让他们的子女在这样一场冒险的实验中作实验品呢？虽然他向孩子们的父母发出了通报，告知他打算做的事情，但他没有遭到反对。他真幸运，”在这个地区中，以英语为母语的父母不到十分之一。如果我去了那些父母都是中学或大学毕业生的学校，我将遇到一场抗议的风暴

——也就不会有实验。”

下面就是当时发生的事情。按本内泽特的说法，“6 年级被分成两组。实验组直到 6 年级开始才学算术，而传统组是从 3 年级开始学。起初传统组领先。到 4 月份，这两组旗鼓相当。在不到一年的时间里，实验组就能达到传统方法教出来的孩子要三年半才能达到的成就水平”。此外，学生们还能看到过程后面的理由，例如，“为什么在分数除法中，正确的答案要由颠倒除数然后相乘来得到。”

他是怎样节省时间的呢？他把他的实验表述成“阅读，思考，背诵”。参加实验的孩子们，比那些来自说英语的家庭的学生，发展了更大的阅读兴趣，更多的词汇量，和更流利的表达。

每当我读他的文章，我总觉得我就跟他在一起，正参与他的实验。虽然行动本能对我发生作用，但我知道，传播他的经验是不可能的。太多的父母是说英语的。正因为如此，他的改革从舞台上消失了，几乎没有留下什么痕迹。在家庭学校或小的私人学校中，学生们以他们自己的而非强加的步伐前进，于此人们可以看到本内泽特的理论被证明是有效的。

我要谈的第二个改革，在数学教学方法上留有较多的影响。我对这次改革了解得很清楚，因为我是它的两位首领之一。

当 1968 年我儿子乔舒亚念中学时，我便去熟悉他打算阅读的教材。其解说和练习糟糕透了——学究式，抽象，冗长乏味。我着手访问由一位高度受人尊敬而又富有经验的教师考尔·克拉比尔所指导的班级，看我怎样才能帮上忙。一段时间之后，考尔和我决定，学生们应当移动他们的座椅围成一圈，按四个人一组进行活动。以这种方式，他们能够互相帮助，得

到及时的反馈，和练习说数学语言。教师仍然起关键性的作用，但那是与仅仅讲课不同的作用。相反，他要在教室里走来走去，检查每组的进展。当发现普遍性模糊混乱时，教师要向全班讲明。还有，教师要引入论题，而且要在这个班级作过之后加以总结。简单地说，学生有时在小组内学习，有时在讲课中学习。

学生们的热情响应鼓励我们把这一实验推广到整个代数——几何——三角系列。和本内泽特的情况一样，行动本能抓住了我们，我们通过数学教师大会上的讲话和专门小组传播这一福音。

我们抛开教科书，油印适当的非正式而带有练习的材料，吁请实验和讨论。最终，这些笔记成为三本教科书，其中几何教材由我们和几何学家唐·查克里安合作。这些是为“分组学习”方法而建设的第一套教材。

大约20年之后的现在，“合作学习”已经成为90年代的时尚。但是，当我参观一个教室时，我常常看到这一方法被误用了：或者教师认为所有的事情都应留给学生，自己什么也不说，或者，相反的极端，回答问题太早，学生在小组内没有时间思考。这不是考尔和我的意思。我们的书仍在出版，但几乎没有广告，湮没在一堆绘有四色插图的更新的书之中。无论如何，我们的革新永存，但几乎不是我们所设想的形式。这就告诉我，没有“不用教师的”教材。教师将永远远比任何教材或计算机程序更为重要。

我要描写的第三个改革，是学校数学研究小组，当时称为*SMSG*，别称“新数学”。它是冷战中一种奇想的产物。

1957年10月4日苏联发射了第一颗人造卫星，当它经过头顶时，数以百万计的美国人看到了它。我注视着它，一个小小的亮点，运动比飞机还快。立刻，一片惊叫之声，“俄国人的火箭比我们的好。我们危险地落后了。我们的教育体制出毛病了。我们必须在所有各个年级改革我们的数学和自然科学教学。”

作为回应，国家科学基金会资助了SMSG，几年之内以数百万美元支持它开发教学资料，作为正式教科书的模型。

至今还不是众所周知的是，在苏联人造卫星之前，美国已有了使卫星升空的工具。但是，艾森豪威尔总统不愿把军用火箭用于和平事业；他认为那样将会传递错误的信息。正如他后来写的那样，“把（和平的）地球卫星计划从军用导弹计划中分离出去是有毛病的，主要的毛病是，卫星计划不能充分利用……军用导弹方面所取得的所有进展。军队毫无疑问能在1956年的晚些时候，大大先于苏联人，把人造卫星送入轨道。”我们能够仅在苏联人造卫星三个月之后，于1958年1月1日，发射我们的第一颗卫星，探险者1号。如果艾森豪威尔少一些顾虑的话，可能根本不会有SMSG。

由于SMSG的重要性，让我们回顾一下，看它到底作了什么，以及它的贡献是怎样被接受下来的。

在1958年这个计划启动时，它的首领埃德·贝格尔宣布了似乎十分合理的5条原则：

1. 没人能够准确地预言哪些数学技能会在将来有用。

2. 没人能够准确地预言一个学生会选择什么职业。
3. 着重理解而不忽视基本技能的教学，对于所有学生都是最好的，不管他们的能力如何，而且这种教学为应用数学的职业作了最好的准备。
4. 了解数学在我们社会中的作用，对于聪明的公民是必不可少的。
5. 任何正常的个人都能欣赏数学的某些美妙之处与力量所在，而这种欣赏是一个文明人的文化背景的一个重要部分。

他也谈到了一个合理的进行方式："SMSG 将把数学家，教师，和教师的教师的努力结合在一起。最终形成的材料应该把正确的数学和合理的教学法熔合在一起。"

SMSG 的大部分工作，是在 1958 年到 1961 这 4 年间完成的。一切都设计得很好：教授们和教师们一起工作，编写教材，在数以百计的班级进行试验。然后，根据教师和学生们反馈回来的意见，各组修改教材。作者们肯定是脚踏实地的。

没人能说各个写作组不能充分代表教师。在 1958 年夏季的第一次写作期间，47 位参加者中有 16 位教师参与写作；1959 年，106 人中有 41 人参与；1960 年，101 人中有 49 人参与；而在 1961 年，71 人中有 40 人参与，显然占多数。

正是从一开始，SMSG 就得到了强有力的支持，正如 1959 年《数学教师》中这些评述所表明的那样：

> 课程改革此前一直在被提倡。但这个运动不一样。大学里的人士和中学教师坐在一起，共同草拟教材。

又如1961年的《数学教师》所说，

> 我们之中熟悉近50年来似乎很有希望的各种努力的那些人认识到，成功往往比预期的要小。或许各地教师的密切配合是个差别，它将保证〔SMSG〕计划的成功。

尽管它的假设合理，它对开发新教材充分关注，它想要修改教科书，它有热情的保证，但还是早有令人不安的迹象。

1960年，在同一杂志上，一位名叫韦莱斯·曼海默的教师表达了严重的疑虑：

> 教师同行们，你们感觉烦恼了吗？你们的学生被有一位像你这样的教师欺骗了吗？他们正在学习600年古老的数学吗？肯定，报纸一直是这样告诉你们的。
>
> “现代数学”风行一时。教现代数学的运动已成为医治我们这个课程的疾病的最新灵丹妙药。与过去的其他运动不同，相当多的大学支持，广泛地宣传和大量的金钱，使它得以加强。
>
> 课堂教师有权不同意流行的预言，说什么中学数

学课程在20年内将会完全不同。他可能以为，新思想的试验会迫使它的反对者退却。

但是，暴风云也从大学吹来。一份由65位数学家签名的备忘录刊登在1962年的这个杂志上：

> 假如课程改革被误导，黄金时机被浪费，那将是一个悲剧。不幸的是，确有一些势力可能将我们引入歧途。
>
> 数学家为反抗可能强调教学法而牺牲内容的职业教育家对教育的统治地位，现在可能强调内容而牺牲教学法，同样是效果不好的。数学家们可能不自觉地认为，所有年轻人都喜爱当代数学家喜爱的东西。

SMSG不为这些警告所动，继续走自己的路。1963年，它不得不发表《父母必读简明数学课程》，承认

> 父母们发现，他们的孩子正在学习的数学课程出了点事儿。家庭作业包含一些新词汇和新观念，而且父母们发现他们不再能帮助他们的孩子做算术问题。

使父母们惊得发呆的那些新观念之一，是异于十的进制。由于它在新数学中的符号重要性，我将用一点时间予以介绍。这个概念至少有三百年的历史，它既不难于也不易于我们仅用符号0，1，2，3，4，5，6，7，8，9来记数的习惯方式。由

于我们对它不习惯，使得它似乎很难。它是另一种语言，一种不同的记数方式。我们使用通常的十进制符号来描述它，因而引起迷茫。我将只是概述足够多的细节，来给予你一个概念：它是如何发生作用的。

我们有十个手指。我们用特殊的符号表示小于十的数，0到9。此后，我们毋需有更多的符号。我们按十分组，再按十个十（称为百）分组，如此等等。当我们书写21时，我们的意思是“两个十加一”，并简短地说成“二十一”。当我们书写201时，我们的意思是“两个百，没有十，再加一”。

关于数十没有什么神圣的。假如我们只有四个手指，即每只手两个，我们可能就会用四而不是十计数。（没有理由按十计数。）在这种情况下，我们只需符号0，1，2，3来表示小于四的数。这是四进制的世界，与我们习惯了的十进制世界大不相同。

在四进制的世界里，下图中的圆圈将被视为“两组四，还剩下三。”



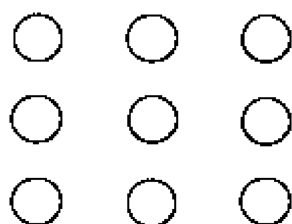
这个数将被写成23。当然，我们是如此地习惯于我们的十个手指，以致我们可能把它读成“二十三”，并想象有更多的圆圈，即“两组十加三”。然而，四进制是不同的语言，虽然它的写法可能与我们习惯的写法样子相似，但它们有不同的意义。在该语言中，“23”将被读成“两个四加三”，而“10”

干脆读成“四”。要“忘掉我们曾经见过的十进制”，而习惯于用别的进制写数，并了解它们的算术是什么样，是需要时间的——可能要几天。

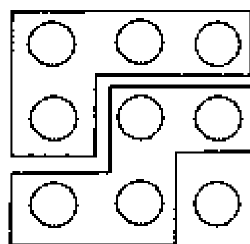
只是为了给一提示：一个生活在四进制世界的儿童将会看到什么，让我们来考察它的乘法表。由于只有四个符号：0，1，2，3，这张表是令人愉快的，只有九个乘积需要记忆。

×	1	2	3
1	1	2	3
2	2	10	12
3	3	12	21

这张表肯定显得奇怪，但只是因为我们大家都习惯了说十进制语言。例如，为求 3×3，这个儿童会画出这样的图形：



然后，如下图，按四计算。



因为这个图是由两组四剩一个一构成的，这个儿童就会把它写作 21，从而得到 3×3＝21。（为了不致把这和十进制混淆，将它读成“两个四加一”，而不读成“二十一”。）

假如我们一只手只有一个手指，我们就可能使用二进制，而且只需要符号 0 和 1 来记录小于二的数。儿童需要记住的乘法表，只不过就是右边的那张表。

×	1
1	1

假如我们的孩子听到这事，他们可能就会反对十进制，而要求我们用二进制。但是，日后他们又可能懊悔他们的选择，因为他们会发现二进制有一个缺点：甚至写一个小的数也需要许多数字。例如，在二进制中，2要写成10，4要写100，8写成1000，16写成10000。

另一方面，二进制让计算机高兴。因为只有两个数字：0和1，它就能够很容易地用电信号把它们表示为“断电”和“通电”。

我不想把这一章变成讲其他进制的一课。要做成一件完善的工作——指明如何相加和如何相乘——需要占好几页篇幅。读者将不得不花费几个小时练习，以求获得算术的感觉。我只想指出，当学生，父母和教师们处理别的进制而不是他们熟悉的进制时，他们所面临的挑战。可能教师们应当学会作任何进制的计算，只是为了当他们的学生学习按十进制作计算时，能够有所体验。无论如何，学习通常的进制——十进制——最好的方法，就是用它作计算。没有必要把它和其他进制纠缠在一起。

SMSG认为它必须对教师进行不同进制的培训，正如它对七年级教师的建议所阐明的那样，“本单元加深学生对十进制整数符号的理解。因为在使用新进制过程中，学生必须用新的眼光审视运算和其他机械似的程序的推理，所以他就会对十进制有更深刻的见地。”

诺贝尔物理奖获得者理查德·费恩曼（1918—1988）对使用不同于十的进制持有不甚乐观的看法，正如他在《你肯定是在开玩笑，费恩曼先生》一书中所述，

在60年代初期，我的助手汤姆·哈维对我说，

"你应当看看，在学校教科书中，数学发生了什么事！我女儿回家带回一大堆疯狂流行的材料。"

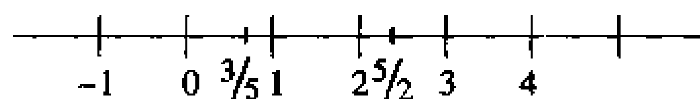
许多人认为，在第一颗人造卫星发射之后，我们落后于俄国人了，而某些数学家被要求对如何教数学提出建议。……

我举一个例子：他们谈到数的不同进制——五，六等等——……对于一个能够掌握十进制的孩子，那是有趣的——使他的心情得到某种愉悦。但是，在这些书中，他们却要每一个儿童都必须学习另一种进制。于是，通常令人讨厌的事就来了："把这些用七进制写出的数化为五进制。"从一个进制化到另一个进制是一件绝对无用的事情。如果你会作，可能是有趣的；如果你不会作，算了吧！它毫无意义。

到1965年，SMSG完成了它的大部分工作，一本回顾它的成就的书出版了，这就是W·伍顿的《SMSG：课程表的制订》。它的语调是乐观的："就学生，教师，教师的教师，父母，行政官员和教授的范围来说，接受情况是十分令人满意的，表明它的影响将持续下去。它的前四年表明，课堂教师和象牙之塔的数学家能在一起工作。"

然而，几年之内，新数学的大部分创新消失了。或许，它在介绍专门术语，抽象化和高深内容方面走得太远。或许，教师未经培训，不适应它。或许，根本没有给它机会。例如，SMSG的一个商业组织的一位销售代表建议教师们，"如果你不想实行新数学，就请删去前一百页"。

但是，并非一切都是徒劳。SMSG给数直线在课堂中以持久的突出地位。正如每一位看到过温度计和直尺的人都知道，数可看作直线上的指定点。自然数，分数，甚至负数，都占据着所谓数直线上的点，如下图所示。



借助于数直线，学生可将数的天地视为一个几何对象。此外，SMSG还把概率引进了课程表，并使许多中学生能够学到微积分。

像SMSG这样一场大规模的兴旺的改革——它把教师和教授们的努力结合在一起，收集课堂反应，并据以修改它的教学资料——的悲惨命运，并未终止为私人基金会，或州政府，或联邦政府所资助的重大改革。现在，刺激因素已不是苏联人造卫星，而可能是美国学生在国际考试中的不佳表现，或是少数人需要不同数学学习方法的信念，或是与计算器或计算机相结合的愿望。

面对过去的教训，教授和教师们还是敢于开发新教科书。当我阅读这些改革之一的计划书时，我觉得一切都是正确的——它的目标，它的慎重的试验，年复一年的修改，来自学生和教师的反馈。我开始觉得我是他们队伍中的一员，而且行动本能抓住了我，“终于有人找到了正确的方法。它是保证有效的。”SMSG中的教授和教师们，当他们为行动本能所束缚时，也一定是这样感觉的。但是，后来我看到了最终产品——一本长达800多页的中学几何书，讲点的定义就用了12页，我

失望了。

甚至比 SMSG 的规模更大的另一次改革，于 1989 年首先登场。在那一年，全国数学教师理事会（NCTM）出版了一本名为《课程与评估标准》的书，描述了在一般情况下该教些什么内容。两年之后，一本与之配套的书《数学教学标准》出版了，它提出了如何教和如何培训教师的意见。

标准的意图是“建立一个广泛的框架，以指导下个 10 年学校数学的改革。它是关于这个课程的一种设想，它应该包括些什么内容，哪些该优先安排，哪些该着重强调。”两本书都号召大力度的改革，改教师讲述为学生发现，改常规计算为猜想和解决非常规问题。两本书都极力主张，指导者应当坚持不懈地强调“行”而不是“知”，数学思想应当以提问—引导的方式由学生而不是教师首先提出。像新数学一样，它强调理解，但也只是这点相似。

新数学产生于冷战；标准是对美国学生在国际考试中表现不佳的反应。新数学注重数学的逻辑；标准注重学生从经验中“构成”数学知识。新数学准备了范本教科书；标准只定出评判教材和教学风格的准则。新数学是数量大体相等的数学家和教师的作品；标准几乎全由教师所制定。新数学只在课程上下功夫；标准的目的是彻底检查课程，教学法，以及给学生评分的方式。

但是，标准的目标与新数学的目标相似：“学生应当重视数学，确信他们作数学的能力，能够解决问题，以及进行数学交流和推理。”

为达到这些目标，孩子们一般是在小组内活动，以构成他

们的知识。（专门术语是构成主义。）正如标准引用“关系到每个人”中的一段话那样，“干练的教师能够激励学生学习数学。学生只有当他们构成他们自己的理解时才能学会数学。他们必须审查，应用，证明，交流。当学生在小组内活动，讨论，陈述，并自己对自己的学习负责时，上述那些要求都很容易实现。学生只不过不学别人指给他们的东西。”

标准面对计算与思考之间的老冲突：“某种程度地熟练纸笔计算是重要的，但这样的知识应当产生于需要它们的问题。”况且，“计算器使得大量传统的复杂的纸笔技能成为过时之物。”

标准把它的改革总结在一张两列的表中，我从该表抽出几个条目。

增加注意	减少注意
不固定的问题	常规的简单问题
发现数学概念	作填空的练习题
根据经验推理	信赖教师，视为权威
把数学同外部世界联系起来	发展脱离课程内容的技能
学生积极参与	教师讲解
开发数的意识	熟记法则

标准不光是给数学教育定调。它明确了一系列的准则，用以确定哪些实验课程会获得资助，哪些实验班会受到支持，以及哪些教科书会予以出版。它的目标，跟新数学一样，也是值

得称赞的。

或许这场新的改革将会成功。如 NCTM 的主席杰克·普赖斯 1994 年所述。

> 当前的改革运动，只要我们继续进行下去，成功将是显而易见的。有许多理由说明这是确实的。数学教育界——数学家，数学教育家，教师和督学——的各个环节，最终都在同一本书中，如果不是在同一页上的话。第二，我们已经消除了"细流渗漏"综合症，它在早先的尝试中被证明是灾难性的；我们确信，在开发和实施中，每个人都是平等的伙伴。第三，这场改革有调查研究基础和坚实的哲学基础。第四，出版商正在制作贯彻标准的教材。第五，可以指望技术对改革的帮助。最后，政府支持改革的方向。

新改革的支持者相信它会成功，因为它避免了他们视为新数学的错误的一些作法。加利福尼亚数学学科事务委员会主席埃莱恩·罗森费尔德在为挑选某些教科书说明理由时指出，"新数学是完全抽象的，使用了不熟悉的前后关联，与孩子们的父母甚少交流，没做任何事使数学易于为孩子们所接受。它加强了父母们的这一信条：数学只是极少数天才的事。它对学生如何学不予注意。它没有帮助教师们了解要求于他们的变化。"

但是，就像新数学曾经碰到某种孤立的怀疑论一样，标准也是如此。协助草拟未开化居民区管理教育计划的小切斯特·芬恩于 1993 年在《教育周报》上写道，"甚至在 K-12 教育的

流行世界里，标准也是罕见地为人所接受。在传统的常识中很少有如此深刻的变化，而标准的实践对它又是如此地推崇，对于它的洪流的阻力显得如此之小，对于它的基础提出的疑问如此之少。我们更希望他们把这事搞清楚。否则，一窝蜂似地往前冲，追随它的引导，有朝一日可能会发现，我们是在撞击悬崖。”

芝加哥大学的一位数学教育教授，左克曼·乌西斯金，更明确地道出了他的疑虑。在一篇委婉地标题为“应对 NCTM 标准的第二版作什么样的改变”的讲话稿中，他提出了并不那么委婉的批评。

> 对标准的异议不多，主要是由于 NCTM 阻挠对它的任何批评。假如谁不赞成标准，谁就一定是反对好数学，好教学和好评估。……
>
> 确实记不得标准中以前曾建议什么而且失败了，也指不出标准中有什么真正新的内容。它的许多建议从未在大范围内试验过。
>
> 虽然对改变数学教育的支持大部分是基于美国学生在国际竞赛中的低水平，但标准并未从外国的作法中汲取最好的思想。国外的课程表被遗忘了。为什么？理由之一是这些课程表没有遵循标准的哲学。在国外，他们不相信，孩子们永远必须自己构成知识。

标准中的思想不是新的。远在 1938 年，前进教育协会提出，“学生应当把握整个面貌，而不是练习特殊的技能……不同的个人或小组，可以对同一问题有相互冲突的结论。”在

NCTM的年鉴中，我们发现，在1940年，“有一种引导学生通过他们自己的经验进入新论题的趋向。”

1972年，旨在指导加利福尼亚州数学教育的《数学结构》建议，“理想的课堂环境激励‘发现’精神。它也提供各种途径，使学生们能在一位鼓励好奇的教师指导下，把握他们自己的学习方向。自己把握方向的学习，需要学生参与创造性的学习实验。它不是由‘现在就来讲它是怎么回事’的讲课来实现的。”但是这些建议几乎没有任何影响。结构在一个州都未能成功，我们怎么能相信标准会在全国成功呢?

我很困惑，标准的作者们没有提出任何试验计划或者任何学区作为一个范例，以表明他们的目标在现实世界中能够达到。这就意味着，他们想要改变整整一代人学习数学的方式，但却没有检验他们的建议的可行性。一位制造商引进一种新肥皂加倍小心，先在几个商店或几个城镇试验其可接受性，然后再投入批量生产。

无论它的目标和提议多么令人称心，标准总必须由出版商和教师来实现。出于好奇，我查看了加利福尼亚最近采用的旨在符合标准准则的一些教科书。

这里引的是一本七年级的教科书怎样让学生们“发现”，一个三角形的三个角之和总是180°。在“一起作”的标题下，它有这样一些引导：

> 先从一个纸三角形开始，它的形状应与你们小组其他成员的三角形不同。给三角形的三个角编号，并把它们从三角形上撕下来。将这三个角边靠边放着，

使一角挨着一角，而又没有角重叠。

似乎能作什么结论？把你的结果同你们小组其他人的结果相比较。作个猜想。

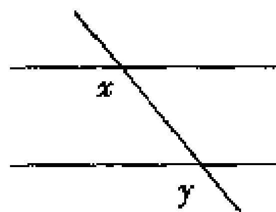
面对这样一些引导，在紧接着的下一页，我们发现，“在一起作的活动中，你发现了下面的陈述是对的。”跟着是粗体字“一个三角形的三个角之和是180°。”

这是来自实验的什么样的发现或构成知识呢？据我对学生们的了解，他们会扫一眼下页上的粗体字，并停止实验。

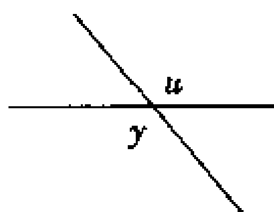
如果你真想要发现，你就让学生们画许多三角形，量出每个三角形的三个角，并把它们相加。（顺便提一句，这又是一种练习。）然后，这堂课可以比较结果，并猜想什么可能成立。他们可能猜出，也可能猜不出，这个和应当恒为180°，一个平角的大小（直角的两倍）。这时，教师可以说，“对，它恒为180°。”但是，这将使学生们失去学习数学推理的一个机会。

换个方式，教师可以说，“实验提示，三个角合计约为180°。但是我们不能肯定，它们之和永远恰好为180。我将向你们证明，这和确实是180°，而毋需作任何实验。”

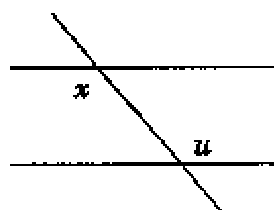
“首先，关于角有几件事情你们必须知道。在这个显示两条平行线与第三条直线相交的图形中，x角和y角相等。



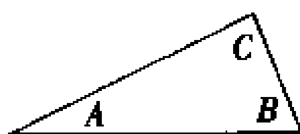
再有，在下图中，y 角和 u 角相等。



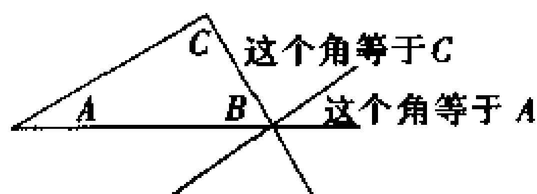
因此，在下图中，x 角和 u 角相等。



“现在设想任意一个三角形，其角为 A，B，C，如下图。



通过一个拐角点作一条直线平行于不通过此点的边。



在此拐角点处位于水平线上方的三个角合在一起，形成一个平角，它有180°。但是，根据我们刚指出的关于角的几个事实，这三个角等于A，B，C。”

然后，教师可以让这个班级对四边形的四角之和进行实验。即使教师向他们就三角形作了充分的解释，也还留下许多东西需要学生们自己去探索和阐发。

一本日本教科书对这个问题作了不同的处理。这一章从相等角的讨论开始。然后叙述一个三角形各角之和是180°，并说明为什么。学生们不是发现，而是被告知。（即使这样，他们在需要创见的考试中表现很好。）

美国教科书以其对比“实验显示”的方法，使学生同时失去了发现数学事实和领会数学证明的机会，在两个方面都达到了最坏的程度。

在我认为理想的一种方法中，学生进行我说的实验，而教科书不在任何地方说出这个和是多少。在这个班级对这个问题有所体会之后，或许会猜想这和是180°，教师可以问，“你能肯定吗？它不能是179.45°？”在一阵讨论之后，教师应当介绍证明。如何权衡发现与教师讲授，由教师来定。（我怕某些教师可能把标准的建议“减少教师讲授”解释为“不要教师讲授”。）

在一本新的加利福尼亚教科书中，在“批判的思考”标题下，有这样的盘问：“一个圆的圆周是否小于围绕它的正方形的周长？合理吗？解释。”

大概它是受标准强调思考与交流的影响。然而，我根本想不出怎样回答第二个问题，也不知道想让学生给出的是何种解

释。第一个问题的答案很简单，“是”，它很难开发交流技能。

在别处我看到这样一个结论：圆周和直径之商不能精确地写成一个小数。这完全是胡说八道。这个商是一个无穷小数，它以 3.14159 开始，只要我们有时间，我们可以写出随便多少位。一个无穷小数是完全合理的：证据，例如 1/3 = 0.333333 …

在浏览过几百页许多现在采用的教科书之后，我发现，它们是被匆忙地凑合在一起，很少或没有经过课堂试验，也没有数学家们严肃认真的意见，为此我感到焦虑。这几百页书表面上忠实于标准的文字，但几乎没有忠实于标准的精神。或许是时间和经费的约束，使得出版者未能把工作做好。另一方面，他们似乎又有时间和经费，以如此之多的四色插图，把教科书弄得零乱不堪，以致我很难从中找到数学。我感到不安，这些出版者附加这样多图，不是为了帮助学生学习，而是为了深刻影响教材评选委员会，他们一定费力地阅读了大量参赛的候选教材。

一个比较日美教科书的报告结论，“日本的书平均 200 页，平均包含 7 章，每一章分为前后连贯的二至三节，而美国的教教科书平均 475 页，平均包含 12 章，每一章大约有一打联系松散的论题。……美国书以 19%的篇幅用于毫不相干的插图，而与之比较，日本书为 0%。

单独的研究表明，毫不相干的插图不能促进学习。显然，美国教科书产生的方式应当彻底检查。

要对把标准引入现实世界负责的，不仅是出版者，而且还有教师。小学教师尤其重要，因为儿童们往往是在五六年级前

形成对数学的持久印象。由于数学是一个紧密相连的结构，一个概念建立在另一个概念的基础上，一个方法建立在另一个方法的基础上，一个学生如果错过了一个关键的思想，可能以后永远也跟不上。

没有几位教师具有实施标准的数学背景。我教过的一些未来的初级教师，一般都回避理科和数学课，而把数学必修课推迟到他们高年级时。有些来听课的学生差到连 5/6 和 1/2 哪个大都说不出来。他们之中有些人也不能用算术或绘图方法证明 2/5 + 1/10 等于 1/2。

一位教师想要实行标准所建议的方案，让她的班级的学生计算修建一个公园所需材料的费用。为求围栏的造价，他们需要周长公式；遗憾的是，她却给了他们一个面积公式。显然，一位在数学上不行的教师，当指导一个班级时，会很快陷入困境，因为什么事都可能发生在任何时刻。

标准对教师的数学训练，规定得远比现在通常的训练要广泛得多。例如，5—8 年级的教师应当知道模系统（数论中专门术语——译注），矩阵，三角，坐标几何，球面几何，统计学，微积分，以及极限和无穷的作用。但愿标准把教师培养放在它最优先的地位，而不是提出一个彻底修改课程，教学法，评估标准和教师准备的一揽子速成计划。

我担心，标准像一位设计了一座漂亮的大桥的建筑师。不幸的是，供应商家用木头和一块钢板做成支柱和横梁。作为木工而不是焊工培训的工人们，却用钉子把它们连在一起。

标准将会把我们或者带进希望之乡，或者引向悬崖。要预言究竟是哪一种结果还为时过早。但是，有一点是清楚的。过

去的这个世纪，实际上存在一个长期不断的改革运动。正如数学教育家和前教师莎伦·达格戴尔告诉我的那样，“它的名称从一个年代到一个年代变化着，但其实质并无多大改变。”

我在下一章提出的建议是如此地简单，而且是在如此小的范围内，以致我并不认为它们是持久不断的改革运动的一部分。

第十三章　一些建议，郑重的与冒昧的

长达一个世纪的改革数学教育的努力，当使任何想提出改进数学教学方式的人却步不前。即使这样，作为一个生来的乐观主义者，我还是要提出一些建议。其中的大部分已被别人不只一次地提过，但仍值得重复。特别，我将引用 H.W. 史蒂文森和 J.W. 斯蒂格勒的书《学习的空白区》（1992）。这本以比较中国、日本和美国学校为基础的小书，值得教师和父母们一读。

我的大部分建议都容易实施。我将从令我气恼的事情开始。

漫　画　家

漫画家们习惯性地把数学作为他们取笑的目标，即便他们只是反映社会对这一学科的不满，那也是无济于事的。这些漫画甚至在用于培训初级教师的教科书中重现。让我们来考察一个孩子在日常连环画刊中读到这些东西时所获得的信息。头一个摘自《花生米》：

"比方说我们把一个苹果对半切开。现在我们就有了两半。"

"这是分数!! 你在试图教我分数! 我将永远不要懂分数! 我要发疯了!"

这是一个训练孩子学习分数的好方法吗? 现在来看, 关于这个问题,《加尔文与霍布斯》(以两个人名为刊名的连环画刊——译注) 怎么样呢?

"关于这堂数学课我有一个问题。"

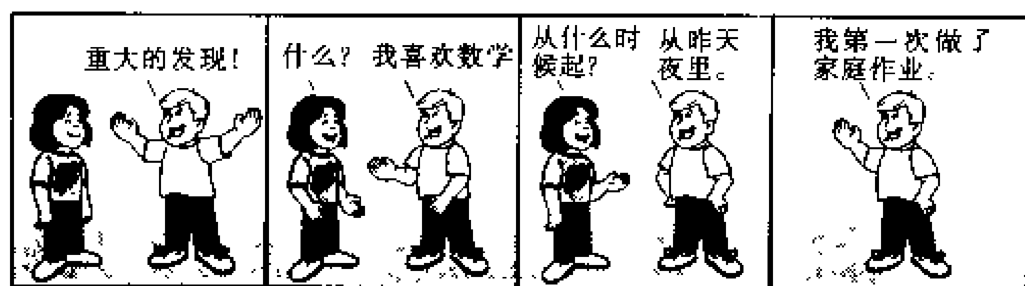
"是吗?"

"我们大家早晚都会死在这种课上, 学习整数有什么意思?"

我承认, 我发现这挺逗乐的。但是, 这个连环漫画为什么不问"学习读, 写和研究历史有什么意思?"(我不是建议它问。) 为什么单挑数学?

我可以从我收藏的连环画刊中征引许多例子, 它们使这样一种观念得到加强: 一个孩子恐惧或讨厌数学是正常的。我还从未见到一个画刊以赞同的态度介绍数学。一位漫画家能不能努力, 哪怕只是一次, 举出数学在我们社会中的关键性作用呢? 下面是表明我的意思的一个样子, 一个不成熟但是我自己的提议, 意在刺激漫画家们, 使得他们会做得更好一些。

我曾经问过外国来访者, 在他们国家里, 漫画家是否嘲弄数学。"肯定不"是他们的普遍回答, "数学是高度受人关注



的，并被视为常人所必需。”要我们的社会改变它的态度，可能需要一代人的努力。但是，漫画家们可以加速这种转变；目前，他们在加剧这一问题。他们应能作为解决问题的一个方面。

我不应该单挑出漫画家。名为“青少年与巴比交谈”的洋娃娃被配置了一个说“数学课真烦人”的程序。为什么不能给她编个程序，让她说“数学课真有趣”呢？在我参观过的大部分数学课中，学生们都很高兴。幸好还有来自妇女运动的呼吁，要求巴比停止抱怨。制造商解释，“我们从来没有阻止女孩或男孩学习数学的任何意图。”不需要意图。在我们社会里，它不想自来。是我们思考我们正在向我们的孩子们传递什么信息的时候了。

《学习的空白区》注意到了这些信息的作用：

一个在教育儿童方面落后的国家，有理由认为，一个能够改变绝大多数学生发型的过程，对于激发他们把更多的注意力放在学习上，可能不会有效。追求知识的人们，应该像体育英雄和摇滚明星一样，值得仿效。但是，树立典型需要自觉地努力。一位“在学业方面未发挥潜力的学生”巴特·辛普森揭示了我们

民族的价值观：美国人把“书呆子”视为要避免的典型，但却没把其成就是以知识为依据的人们树为供学生模仿的正面典型。

广告宣传还可把其贡献是靠数学知识的那些人，添加到公认的著名人士名单中去。

父　母

一所中西部的学校给父母们评级，对于他们提供安静的时间让他们的孩子做家庭作业，同孩子们一起读书，以及参加诸如“返回学校之夜”的学校活动，给予赞扬。这个计划提醒父母，他们在孩子的教育中起着巨大的作用，这种作用太经常地被完全推给了学校。

阅读对于在学校中获得成功是关键性的；数学尤其如此。父母可以通过阅读示范帮助他们的孩子成为好的朗诵者。正如阅读考察团 1985 年报道的那样，“为了获得朗诵的最后成功所需要的知识，惟一最重要的活动，就是对孩子们朗诵。”吉姆·特里利斯的《朗诵手册》解释了原因和方法，推荐了题目。

《学习的空白区》对父母参与学校活动提出了重要的观点：“父母们不应当在他们的孩子上学之后就脱离教育，而应当保持他们在孩子学龄前表现出来的高度参与。如果他们不能表明他们重视教育，并愿意参与学校所进行的一切活动，他们的孩子就会把学校看成与他们一生的主要活动无关。”

老师们告诉我，他们通过注意父母的参与程度，往往能够预言一个学生的表现。纽约州利物浦的一位中学教师巴巴拉·戈登说，“在我的优秀班级里，大部分父母都来参加学校开放

日的活动。在我的其他班级，非常之少。”

不论社会上对学习的流行态度是什么，父母可以起抵消作用。这在全国足球联合会运动员规划部主任约翰·伍德的建议中说得很清楚，“一个杰出的运动员到上大学时，他把中小学就只看做是他崭露运动才能的地方。打破这一格局的惟一方法是，父母们在其孩子的教育中起更大的作用。”他的忠告适用于所有父母，因为所有的儿童都面临大量分散他们对作业的注意力的事物。

一位印地安纳中学教师拉里·阿斯金斯给我的一封信，对这些分散注意力的事物表示了抱怨，“学校音乐会，乐队比赛，网球比赛，田径运动会，舞会，足球练习，拥有轿车（靠做兼职工作付款），这些只是转移学生对其家庭作业注意力的众多活动中的几项。”

甚至那些只有极其有限的数学基础，不能帮助他们的孩子做家庭作业的父母，也仍然可以提醒孩子注意数学的重要性。我的父亲只上过三年级，我的母亲只学过算术。虽然他们不能直接帮助我，但他们使我深信我的学习是重要的；他们告诉我，“你有一个任务：学习。”

甚至一位兼做两职的单身母亲也可以让她的孩子知道，她认为学校应处于高度优先考虑的地位。即使在一天里她只能在短时间内看到他们，她可以问，“你今天学什么啦？”并且提醒他们，数学不仅在许多工作中需要，而且也是进行日常生活决策的一个工具。

给你的孩子提供一个明亮的学习场所，最好有一张书桌，但厨房桌也行。《学习的空白区》报道，“典型的日本家庭占有

不到900平方呎的面积，有时被嘲笑为‘兔棚’。但是，80%以上的家庭都留出地方，使他们的孩子能在那里做家庭作业。”在他们的抽样调查中，几乎每个5年级学生都有一个书桌，而在美国的抽样调查中，这个数字大约仅为60%。

我听到过有些父母对他们的孩子说，“我在数学方面不怎么样，我也不指望你怎么样。”奇妙的心理学，也是错误的心理学。有无数影响可使一个人不擅长于某一科目，但没有一种影响是由基因遗传的。正确的态度是，鼓励你的孩子克服他们可能遇到的任何困难。毕竟，不是要求他们发明崭新的数学，而只是学习存在已久的数学的一小部分。

一些教师不愿意留家庭作业，因为惧怕家长的强烈反应。甚至在练习至关重要的代数课中，也发生这种情况。要让教师们确信，你希望他们留他们认为必要的作业，而且你将支持他们。

帮助你的孩子安排优先考虑的事，以使重要的事情先做。如今，许多孩子日程排得过满，以致没有时间做他们的学校作业。如果你的家里有这样的事，帮助你的孩子削减活动。可别像那样的父母，他们向老师解释，他们的孩子没有时间做家庭作业，是因为孩子要练武术，体操和钢琴。

当我在洛杉矶成长的时候，除了家庭作业之外，我过着轻松自在的生活，在街道打篮球，在空地挖堡垒，在朋友家玩乒乓球。提起——在完成家庭作业之后——自由自在的，没有日程安排的，即兴的游乐，有许多可以说的。我们在《学习的空白区》上看到“中国和日本的儿童知道，只有在他们完成每天的学校作业之后，他们才会有自由支配的时间。”在美国，休

闲活动同学校作业争夺孩子们的时间。

作为父母，你们可以丰富你们的孩子的数学经验。让数在你们的日常生活中起自然的作用。当你做饭时，让你的孩子使用量杯。当你挂窗帘或作书橱时，让你的孩子帮助测量。在购物时要求帮助计算；例如，让你的孩子比较特大号与大号每盎司的价钱。当开车旅行时，要你的孩子领路，看地图，估计到达下一个城市的时间，或计算还剩多少汽油。当飞行时有着类似的问题，包括“以哩计我们现在多高?”或“有多少座位?”(一个极好的乘法应用)或“有人的座位占多少百分比?”“旅客总共要为这趟飞行花多少钱?”“一分钟用多少加仑燃料? 一秒钟呢?”“飞行一哩需要多长时间?”

在餐桌旁，提些趣味数学题或就是简单练习题。当我女儿苏姗娜还在一年级时，我同她玩的游戏之一就是“求 x”。例如，“若 3 乘 x 为 15，x 是多少?”“若 x 乘 x 比 x 多 6，x 是多少?”这样使孩子们在学代数之前早就习惯于把 x 作为未知量的常用名称。不妨通过游戏介绍数学。对于儿童来说，游戏也是一件严肃认真的事情。

每天的报纸充满着数，其中体育版满是小数和百分比，而在足球季节还有负数。

维持女孩对数学的兴趣，可能需要母亲起更大的作用。《对我的女儿来说情形就会不同》一书的作者敏迪·炳海姆强调，“妈妈的态度有着持久的影响。”她建议，即使一位母亲对数学不感兴趣，也“别承认它。这是需要你表演节目的时刻。甚至连讨厌它的笑话也不要说。”

一位数学程度很低的母亲，帮助她的女儿发展了对数的驾

驭能力。她的方法是“当我每天缝衣，做饭，购物用到数学时，我就予以指出。我让孩子们参与我的思考。”

这里是来自那些想要把女孩们从“女孩数学不行”的偏见中解放出来的专家们的一些其他忠告：给你的女儿一笔钱，让她作预算和消费记录；在数学方面要求你的女儿跟要求你的儿子一样；确保她的老师不偏爱班里的男孩，哪怕是无心的；向你的女儿介绍备有“非暴力，非竞赛”软件的计算机。（最后一条对于儿子也可能是一个好主意。）

怎样对待电视？电视上虽然有一些精彩的节目，但媒体本身就是危险。它可以抓住观众，使之着迷几个小时。奴役似地坐在屏幕前度过的时间，不是积极度过——游乐，读书，助人——的时间。

如果你不能支配电视，干脆把它扔出去，或者如减震器标签上写的，“毁掉你的电视。”这样一个无情的举动，甚至在今天我们这个年龄也是可能的。当我们的孩子成长时，我们没有电视。现在，我的女儿丽贝卡的家里也没有电视，但她的5岁和9岁的孩子生活得十分好。

然而，扔掉电视可能太极端了。电视上毕竟还有一些值得一看的节目。马上就能想到例如南北战争，经济萧条，和人权运动系列片，以及艺术，自然和科学节目。帮助你的孩子学会选择看哪些节目，可能有助于他们在今后的生活中自己思考并作出选择。作为成人，当他们面对这个世界呈现的许多诱惑时，他们肯定需要有个人素养与自我调节。

显然，父母对其孩子的数学教育负有主要的责任，即使他们不能帮助解决家庭作业问题。在我们批评教师之前，我们应

该首先检核，为了鼓励我们的孩子，我们已经做了所有我们能做的事。有这样一位母亲，当巴巴拉·戈登告知她的孩子有困难时，她答道，“你是老师。这是你的问题，与我无关。”我们应当努力反其道而行之。

学　生

当孩子们成熟时，他们能够对自己的学习承担越来越多的责任。但是，有些孩子毫不负责，就像他们对于自己的教育是旁观者似的。这一极端的最好例子是这样一位学生，他向学校要求“即使我不学习，也让我一个接着一个年级获得通过，并发给我毕业证书。”

年轻的本杰明·富兰克林代表相反的极端。当他大约 16 岁时，他决定提高他的写作技能。在他的自传中，他谈到为达到这一目标他是如何做的：

> 我认为《旁观者》中的作品是相当不错的，而且如果可能的话我想摹仿它。怀着这样的意图，我拿来一些文章，对每个句子的意思作一简短提示后，把它们搁上几天，然后，撇开书本，试着重新写出这些文章，把每一个提示，用想得到的任何适当词语，详细地表达出来，尽可能像原来表达的那样完满。然后我把我的“旁观者”同原本进行比较，发现我的一些毛病，加以改正。……
>
> 有时，我还把我的全部提示弄得乱七八糟，待到几周之后，在我构造完整的句子，重写该文之前，再把它们尽量整理得处于最佳顺序。这是为了教我安排

思路的方法。后来我把我的作品同原作比较，发现了我的许多毛病，并予以改正；但是，我高兴地自以为在一些不太重要的细节方面，对方法或语言有所改进，而这就鼓舞着我觉得我可能总有一天会成为一名还算可以的英文作家。我做这些练习和阅读的时间是在夜里，下班以后，或上班之前的早上，或者星期日。

设想有一把自立的尺子，它从一端为向学校提出要求的小伙延伸到另一端的富兰克林。每一个学生处于二者之间的某个地方，可以选择向富兰克林一端移动。如果课堂混乱，这样一种选择可能是必要的。

商　家

商家们每年要花250亿美元对其工人进行补习教育。我建议他们把这个预算的一部分转向改进数学教育，比方说建立基金用于推动数学家去作低年级教师。或者，商家可以赞助教师们参观各个年级的课堂和产业部门。否则，教师们就会囿于他们自己教室的狭小天地。从长远来看，这样一笔投资比现在用于补习的花费可能节省得多。

数 学 系

数学教授们认为，或许是下意识地，主修数学的学生将会继续实行计算机科学或数学方面的研究生计划，或者法律或医学方面的专业计划，或者他们会成为保险统计员或系统分析师。使我的同事们和我感到意外的是，发现我们的毕业生中有一半是作中学教师。在有些大学里，这个数目竟高达70%。

每个数学系都应回答这样一个问题，“对未来的教师们，不论是否数学专业学生，我们能够进行帮助的最好方式是什么?”回答会是不同的，但我怀疑它会是“我们目前正在做的就最好。”

数学教学标准注意到，“在当前数学系的培养工作中，预备教师和跟预备教师打交道的人们，被作为二等公民对待。”一位名叫托马斯·亨格福特的数学教授，在一篇题为“未来的初级教师：被忽视的选民”的文章中，对数学家提出警告：

> 在大学数学系和中学数学教研室中，都盛行对新生的数学准备有所抱怨。面对糟糕的事态，大学教授往往责怪中学教师，中学教师又依次责怪小学教师。虽然这个责怪的线性模型可能使处于最上层的那些人感到舒服，但一个循环的模型（责怪所有人）则会更好地反映现实，因为初级教师就是抱怨新生的同样一些大学教授“培养”出来的。

我迫切希望我的数学同事们阅读亨格福特的许多特别建议，并且参照实行。

在1991年《大学数学教育》中J.R.C. 莱兹尔注意到“小学教师的数学准备或许是我国整个数学教育系统最薄弱的环节。”然而，欧洲的数学家们有着参与大学前教育的长期传统。作为例子，我举几个所有数学家都熟悉的名字：A.N. 柯尔莫哥洛夫，菲力克斯·克莱因，戴维·希尔伯特，杰克·阿达玛，和史蒂芬·巴纳赫。

我们能做的最起码的事情，是开一个为期一年的课程。从高观点的算术开始，最终达到微积分基础。这个课程将给予各级未来教师以正确观察事物相互关系的能力，从而丰富他们的教学，并帮助他们评价改革与教材。此外，这个材料应当既基本又漂亮，使得其他学生也可使用。

但是，重要的不只是教的内容。介绍内容的方法更是关键性的，因为教师们将会按他们被教的方法去教。这就意味着，指导教师不仅要讲课，而且在适当时候要采用其他手段如合作学习和其他方法。

我们已经开了为工商专业学生和工程师设计的课程。是我们适应未来教师需要的时候了。

未来教师教育的特殊方面，提出了一个更一般的问题。

未来教师的专业准备

在许多国家，未来教师要参加一个教学项目，一年之后获得一个证书；该证书证明它的拥有者们是下述意义的“专家”，即他们能够比没有证书的一般人教得更好。然而，大量实验表明，一般教师也能在课堂里教得跟有证书的教师一样地好。

L. 詹宁斯，S. 乔治，和 A. 谢尔在他们所写《专业的教学特长：是事实还是神话》一书中断言，“至少对小学教师而言，在专业准备的数量和教学效果之间，没有或极少有联系。不错，调查显示，不同教师的教学效果确有明显的差别，但这些差别似乎与专业准备无关。这些反差似乎由自然出现的差别所造成。”

他们的论据是无可辩驳的。它部分地基于受控实验，在这些实验中，有证书的教师和一般教师教同样的课程。它也基于

受雇人们的业绩，因为没有足够的持证教师，以及根据他们对课程内容的掌握而被授予证书的人们。因此，作者们建议，“适合于小学任教的主要要求，应当是使学生成绩出现大幅度提高的能力。”

这就意味着，证书的授予应当根据业绩，而不是根据所学课程的数量。“没有别的要求能有效地预示成功。”这样一个准则将使教学同诸如行医之类的职业一致，都需要细心监察的训练。

学　校

最后，我要谈到学校。《学习的空白区》有许多建议，劝导我们的学校借鉴例如日本的学校。它的最重要的建议是，“减轻小学教师的教学负担。教师们若没有足够的时间备课，课外做个别学生的工作，以及通过相互交流和与校长交流以完善他们的教学实践，将难以，如果不是不可能的话，改变儿童们在学校所学的东西。”

这样一个改变，可能需要增加税收，以支持我们的学校。不幸的是，税收已成为一个谈话制动器，虽然和别的工业国家比较，我们并没有过重的赋税。我们的学校是最后一个省钱的地方。在这方面短期的省钱，将会导致今后长期的费钱。居住在我们的监狱和看守所中的150万人里面，有85%没有中学毕业，应该唤起某种反思。一个强有力的学校系统，意味着更高级的劳动力，转过来又能纳税，而且不大可能需要福利。

非常奇怪，一个国家可以花至少200美元从第二十九届超级保龄球赛的70 000张票中买一张票，可以花1 600万美元买16 000张票现场观看泰森——麦克尼利拳击比赛，花6 500万

美元看这场比赛的电视转播（152 万台电视机，每台平均费用 43 美元），却缺乏支持它的学校的财力。或许我们应该问问自己，“重要的是什么？”如果我们不问，那么，就像只会抱怨的数学教授一样，我们应该停止对我们学校的批评。

接受数学的分裂特性

我最后的建议可能是本章中惟一的新鲜建议。但是，它是如此明显，以致我敢肯定我不是作此建议的第一人。

在基础与理解之间，在常规计算与逻辑思考之间的战斗，已经在数学教育中持续了一个世纪。不只一次的改革都承诺要解决这场争端，但都失败了。

可能只有一种办法一劳永逸地解决这个问题。不再继续这场旷日持久的战斗，而是利用数学的两重性。应当有一门课专事计算，有一门课专事概念和求解问题。二者都有足够的内容。

计算课除了提供计算实习之外，还将包括算盘，计算尺，计算器，计算机和心算。概念课将展现诸如分数概念和十进制记数法的基本思想，这些思想的历史和非常规问题的求解，以及书面和口头进行数学交流的技能。通过这样的划分，基础或概念都不会压过另一方。

如果没有足够的合格教师来担任“概念”课，那么可以雇用冷战结束后流亡的某些工程师和科学家。可能不得不付给他们以较高的工资，这会刺激别的教师，但这些教师也会不得不适应。在我的校园里，工程，法学，医学和经济学教授比其他教师的工资要高，但余下的我们这些人已经学会在不平等中生活。

把这个建议付诸实施可能需要时间。但是，对比表明，其他建议比较简单，明日即可实行。没有必要等待和观望改革运动的最新努力结果如何。同时，我们每个人能做的事情都很多。

第二篇　从中学到幼儿园

第十四章　怎样阅读数学

我常常倒读报纸，先看体育部分，然后是天气，然后是安·兰德斯专栏，最后看前面部分。甚至前面部分我也是从后往前看，因为最重要的新闻往往单调乏味，因而被放在最后几页。那不是阅读数学的办法。甚至按作者意图的方向阅读报纸，杂志和小说，也不等于人们就会阅读数学，或以精确的数学语言写成的任何课本，例如电子学手册或物理书。

为了沿着推理的思路亦步亦趋，读者必须成为一位积极参与者，实际是成为一位合作者。它不只是一个阅读得比平常要慢和同一页多读几遍的问题。它是一个警觉和疑心，不让什么东西轻易溜掉的问题。什么都不能遗漏。读者应当像作者一样辛勤地工作。

可以从另外一个角度来看阅读数学的要求。作者试图选择会使逻辑清晰的词语，以适应许多有着不同思维方式的读者。而另一方面，读者必定只是面对一人，即作者。双方都必须扮

演积极的角色。在这种意义下，数学又是一个动词，而不只是一个名词。

简单地说，读者应当核实每一步都是清楚的：停下来画欠缺的图形，检验计算，构造例子以说明作者所作的某一论断。日常生活中的体验与之最接近的不是阅读报纸。它倒有点像两个人踢口袋，按商标名也叫霍克袋。目的是让一个塞得满满的网球大小的口袋，保持运动而不用手触碰。

我赞成专栏作家玛丽琳·沃斯·萨范特给一位读者的建议。这位读者写道，“我硬是记不住代数。你有什么建议吗？”她回答，“买一本最基本的中学代数书，从头开始一直研习到底。除了应用公式之外，通过问题学习推理……

“为什么这么多人对数学有困难呢？因为数学的研习要求完全精确。在前进的每一步中，严密注意最小的细节是绝对必要的。”

但是，这不仅对阅读数学而言是正确的。它适用于木工，网球，唱歌——能够做好或做坏的几乎任何活动。

在报纸和数学之间还有另外一个对比。数学是以精练，简明的文体写成的。报纸有一定的松散度和多余词语。你可以删去一些词语，但仍然能够理解一个句子。作为一个例子，上述三句话可以缩短为，“数学是精练的。报纸有多余词语。你可以删去一些词语，但仍然理解一个句子。”

甚至有可能从通常写法的词中删去一些字母，仍然明白它的意思。如果我说 I had bkfst, lnch and dnr today（其中 bkfst, lnch, dnr 分别是 breakfast, lunch, dinner 的缩写，所以全句的中译文是“今天我吃过早餐，午餐和晚餐”——译注），读者

就会知道我没有挨饿。类似地，个人执照“TRTH SKR”也容易译解。（它是“turth seeker（真理追求者）”去掉元音。）在数学中，每个符号都有作用。下面五个陈述说的都是同一件事情。第一个陈述是平常的说法。第五个是数学说法。中间三个陈述，表明从慢条斯理的冗长的第一个到商业式的精练的最后一个的逐步转换。

△三是这样一个正数，当你将它自乘时得九。

△三是平方等于九的正数。

△3 是平方等于 9 的正数。

△3 是 9 的正平方根。

△$3=\sqrt{9}$。

试将第五个句子与第一个句子比较。在最后一句中，没有一个符号可以省去。（顺便说说，平方根符号$\sqrt{\ }$可能来自圆点。几百年前，9 的平方根像是写成 .9。有人认为这个符号是畸形的 r，表示“root（根）”，但没有证据支持这个信条。）作为练习，我们指出，$\sqrt{36}=6$，$\sqrt{49}=7$。在这两种情况下，平方根都是方便的数。但是，一个平方根不一定会这样好。例如，40 的平方根介于 6 和 7 之间。我邀请读者或动手试算，或用计算器，估计$\sqrt{40}$到若干位小数。

为了确信我的论点是清楚的，我将举另一个例子，以平常说法开始，而后以简明的数学语言告终。

△当你将一个介于 0 和 1 之间的数自乘时，你会得到一个小于该数的数。

△一个介于 0 和 1 之间的数的平方小于该数。

△若 r 是一个介于 0 和 1 之间的数，则 r^2 小于 r。

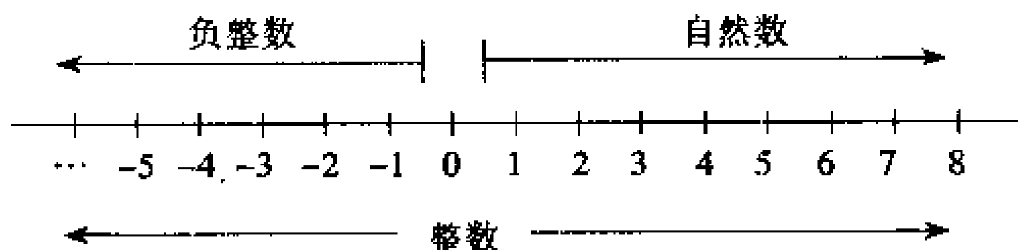
△若 $0<r<1$，则 $r^2<r$。

（最后这个说法使用了符号<，它是“小于”的简记。”）

在第四个精练至极的句子中，读者遗漏任何一个符号都会弄不懂原意。它不适宜于快读。相反，它要求慢读。虽然它比第一个句子简短得多，但说的是同一件事情。读者应当用 0 和 1 之间的某数，比方说 0.7，作个试验，以检验它的合理性。0.7 的平方是 0.49，的确小于 0.7。进行这样一个检验，既提供一个额外的记忆提示，又提供一个“减速装置”，使读者放慢到适宜于阅读数学语言的速度。自言自语或高声朗读每一个符号，也有同样的效果。

在第十五章中，我要用自然数这个术语。为了肯定我们大家都一致认为它的含意是什么，我将停下来予以定义。一个自然数就是我们数（shǔ）数时使用的数 1，2，3，4，5，……中的任何一个。有的人甚至也把 0 包括在内，因为“一开始什么都没有。”

整数比自然数更为一般。它或为自然数，或为 0，或为自然数的负数 。在下面展示数直线的图线中，整数以等距离的标志表示。自然数是位于 0 右边的整数，是正整数。负整数位于 0 的左边。零本身既非正数，也非负数。



下面是我们将要使用的几个词语的简明定义。今后我们还会扩充这张表。

词语或符号	意　义
$<$	小于
$>$	大于
$=$	等于
$\approx$	近似于
$\sqrt{\ }$	平方根
自然数	1，2，3，4，5，…
整　数	…，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，…

数学不是惟一必须逐字逐句逐个符号阅读的文字。其他例子有，一种杀虫剂的警告，一种肉汁菜汤的烹饪法，甚至一本电子学手册。我们必须换上慢档，以求了解重要的细节。阅读每天的报纸不能培养这样的正确速度，耐性和细心。

还有一个建议。要特别注意定义。抄写定义会使你集中注意力，并有助于你记住它们。

我记得有一个数学方面的研究生，他说过，“当我阅读时，我打算略过细节，而把注意力集中在思想观点上。以后我会回过头来填补这些步骤。”两年之后他告诉我，他什么也没学到。为在事情的真相与重大思想观点之间保持平衡，读者应当首先注重细节，然后把各个片段归拢到一起。

阅读数学要慢，逐字逐句逐个符号地读，并检验每一个陈述。第二次从头到尾，把所有的内容拢在一起。即使你不习惯这种阅读方法，你会发现，通过实习，它会成为十分自然的事。记住下面这些话：

在这么多年之后
奶奶的英语仍然不好，
她的口音浓重。
她理解，她被理解。
她勉强过得去，这就够了。

我像她一样：
我会换灯泡，
煮鸡蛋，
系鞋带。
我停止在那里。
为什么不给房子装电线，
烤面包，
学习打结
以束紧帆布？

为什么我会安于现状，
低估自己？

我能跳多高？
能击什么样的好球
或作一幅多好的水彩画？

假如我生长在中国，
我就会说汉语。

第十五章给你一个阅读数学（不是汉语）的实习机会。

第十五章　你永远不会见到大数

一天，《萨克拉门托蜜蜂报》的一位记者打来电话，问我，“在加利福尼亚的预算中有 80 亿美元的赤字。有没有什么办法帮助读者感受 80 亿到底是多少？”

“噢，那就好像 400 000 工人，每人挣 20 000 美元。”

“太抽象。”

“那么，这样来看行不行：用 80 亿张一美元的钞票你能覆盖旧金山的多大部分？”

“这样会更具体。”

“我会把它算出来，然后给你回电话。”

我知道旧金山大致是一个正方形，每边长 7 哩，因此它的面积大约是 $7 \times 7 = 49$ 平方哩。接着我量一美元的钞票，其结果是 6 1/4 吋乘 2 5/8 吋。再把这两个数变为小数 6.25 和 2.625 之后，我启动我的计算器，算出覆盖这个城市大约需要 120 亿张一美元的钞票。因此，80 亿只能覆盖旧金山的大约三分之二。但是，用它覆盖整个曼哈顿岛，或更恰当地说，覆盖萨克拉门托本身还有多。当我们作这一计算时，注意到下述情形或许会有用处：5 万亿美元的国债可以覆盖整个佛蒙特州和新罕布什尔州，剩余部分还可满足纽约市、芝加哥、洛杉矶和你挑选的其他几个城市的需要。

所以，在我们每天从报章上看到的数中，十亿或者万亿似乎是很大很大的。即使当我们读到一个公司买下的全部产权，一场地震的损失，或一艘潜水艇的造价时，我们见到这些数字，但它们还是超出了我们的理解力。

我愿意把 10 亿美元想作“大约32 000工人，每人挣32 000美元”。这样就把它降到了人们能理解的范围，但仍保持同样大小。按照此法理解，100 万美元只不过是 1 000 工人，每人挣 1 000 美元。

无论如何，十亿（1 000 000 000）和一万亿(1 000 000 000 000)拥有太多的零，以致难以读认。比较容易的记法是告诉人们，你必须将 10 自乘多少次，才能得到这样一个数。十亿有九个零，是九个 10 的乘积，即 $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$，写作 10^9（读作“十的九次方”）。因为一万亿有 12 个零，它被写作 10^{12}。这个所谓指数记法的优点是简洁，而其缺点是隐蔽了这个数真正的大小，因为我们再也看不到一长串零。

当我正撰写这一章时，我的 6 岁孙女海莱娜边喊边问，“一古戈尔（googol，10^{100}——译注）是多少?”原来它紧挨着词典中定义的最大数。它是 1 后面跟一百个零。它第一次出现于爱德华·卡斯勒和詹姆斯·纽曼 1940 年所写的书《数学和想象力》中。这个名称来自卡斯勒的 9 岁的侄子。“古戈尔普利克斯”的名称也是如此，它是 1 后面跟 10^{100}个零，词典中最大的数。虽然它看似非常之大，但数学家在他们关于自然数性质的研究中已经遇到更大得多的数。

回溯到公元前 3 世纪，阿基米德针对一个数是否如此之大

以致成为无穷的问题写道：

> 包括金·吉隆在内的某些人认为沙粒数是无穷的；我说的沙，不仅是指锡拉库扎附近和西西里其他地方存在的沙，而且也指在每一个有人或无人区域发现的沙。……但是我将力图向你证明，由我命名的数的数目不仅大大超过充满地球的沙粒数，而且甚至超过充满整个宇宙的沙粒数。

阿基米德假设一粒沙子像一颗罂粟种子那么大小，宇宙的直径至多为地球的一万倍大，他断言，在宇宙中存在的沙子不多于 10^{51} 粒。

我确信，我们都会一致认为，一百万，十亿和万亿是大数，而 1 和 10 是小数。关于 100 和 1000，我们可能就不会都一致。这就提出一个有趣的问题，“小数止于何处，大数起于何处？”我把这个问题留给读者琢磨。

然而，结果是，在数学中，甚至一万亿也是微不足道的。它实际是一个小数。我将走得更远，竟至宣布，没人见过真正的大数，永远不会见到。当然，我最好为这一断言提供依据，特别在注意到 5 万亿美元能够覆盖两个州之后。

为了说明我何所指，我将叙述一个简单的单人游戏，用纸，铅笔和自然数 1，2，3，4，……就可以玩。如我在本章末解释的，这个游戏在数学中有着严肃的含意。

取出一个自然数。如果它恰好有两个不同的因子，本身和 1，它就被称为素数。例如，前几个素数是 2，3，5，7，11，

13，17，19和23。从2开始的每一个自然数，或者是一个素数，或者有恰好一种方式表示为一些素数的乘积。（注意，1不是素数，因为它只有一个因子，即它本身。）

注意，从2开始的任何自然数，或者是一个素数，或者是偶数个素数的乘积，或者是奇数个素数的乘积。例如，

$$15 = 3 \times 5$$

是两个素数，因而是偶数个素数的乘积。我们称一个自然数为偶积，如果它是偶数个素数的乘积。因此，15是一个偶积。但是，

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

是三个素数，因而是奇数个素数的乘积。我们称这样一个自然数为奇积。我们也将把每个素数看作一个奇积，因为我们可以视之为只是一个素数的"乘积"，而1是奇数。例如，11和29都是奇积。称1这个数为偶积（因为它包含0个素数，而0是偶数）。

现在，把自然数分为两队：奇积队和偶积队。下面这张表展示，从1到15，哪些是奇积，哪些是偶积。

数	1	2	3	4	5	6	7
因子分解	—	素数	素数	2×2	素数	2×3	素数
判定	偶积	奇积	奇积	偶积	奇积	偶积	奇积

数	8	9	10	11	12	13	14	15
因子分解	2×2×2	3×3	2×5	素数	2×2×3	素数	2×7	3×5
判定	奇积	偶积	偶积	奇积	奇积	奇积	偶积	偶积

直到15为止，有8个奇积，但只有7个偶积。设想奇积队和偶积队之间的一场比赛，我们可以说，奇积队以8比7的比分领先。一开始，偶积队暂时以1比0领先，因为1是一个偶积。但是，奇积队随即追了上来，到3为止，反以2比1领先。

然后，$4=2\times2$，一个偶积来到，比分变为2比2，打成平局。然后，由于5，奇积队又走在前面，比分是3比2。但是，随着一个偶积$6=2\times3$的来到，偶积队再次追上。此时，奇积队和偶积队的得分都是3。但是，7接踵而来，奇积队走到了前面，以4比3领先。

这就提出一个问题：除了开始暂时领先之外，偶积队还会有领先于奇积队的时候吗？G. 波利亚（1887—1985）于1919年提出这个问题，而且验证了，至少到1 500为止，偶积队不会领先。R. 莱曼验证了，直到1 000 000万，偶积队不会领先。这个事实可能让我们相信，偶积队永远不会领先。毕竟，一百万看似一个很大的数。

出人意料。莱曼在1960年指出，如果你把这个游戏继续做下去，直做到数906 180 359，几乎是10亿，那时偶积队将领先于奇积队1分。1980年，M. 塔纳卡指出，第一次出现这种情况是在906 150 257处。

因此，一个试验即使进行到一百万，也可能使人作出错误的结论。如果你意识到，自然数一个接一个，永无休止，那前面的一百万，或十亿，甚至一万亿个数，实际上是一个非常之小的样本。它们只构成自然数无穷线条上可以看到的前面一段。

毫无问题，可以说，我们能见到的任何自然数，或者说我

们能写出的任何数，甚至带有长达一哩的一串零，都是微小的数。关于自然数的真理，存在于数的王国，“路途遥远”，大大超出了我们实验的极限。甚至一秒钟完成十亿次运算的计算机也只是运作我们能见到的一小部分自然数。

现在，让我们来玩另一个游戏，它是前一个游戏的变种，是 F. 默顿斯（1840—1927）在 1897 年发明的。它向人们提供甚至更加鲜明的告诫，要警惕微小的数。

有些数是几个素数的乘积，其中每个素数至多出现一次。描述这些数的另一方式是说，“它们不能被大于 1 的任何平方数整除。”这种数的四个例子是 2，15，165 和 858，因为

$$2=2,\ 15=3\times5,\ 165=3\times5\times11,\ 858=2\times3\times11\times13。$$

注意，每个素数都属于这种类型。

在其他数中，至少有一个素数因子重复出现。4，45 和 27 是这种数的例子，因为

$$4=2\times2,\ 45=3\times3\times5,\ 27=3\times3\times3。$$

我们不去注意第二类数。可以这么说，我们把它们抛在一边。我们将只看第一类自然数，其中每个素数因子恰好出现一次。我们称这类数为 S 数，其中 S 表示“Special（特殊的）”或“Square - free（无平方的）”。我们将把 1 作为特例包括在内。这里是直到 30 的 S 数及其因子分解表：

S 数	1	2	3	5	6	7	10	11	13
因子分解	——	素数	素数	素数	2×3	素数	2×5	素数	素数

S数	14	15	17	19	21	22	23	26	29	30
因子分解	2×7	3×5	素数	素数	3×7	2×11	素数	2×13	素数	2×3×5

为了体验对S数的感觉，你亲自对此进行检验，然后继续往下写，不失为一个好主意。

一个S数，或为一奇积，或为一偶积。我们将分别称之为S奇积和S偶积。这个游戏涉及这两种数，但它同我们的第一个游戏完全不同。

这次，我们取出一个自然数，称之为n，因为没有更好的名称。然后我们看直到n有多少个S奇积，以及直到n有多少个S偶积。最后，我们求出这两个合计数之差。

为了确信我的交代是清楚的，让我们来看数n为30的情形。直到30，S奇积是

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，30。

因此有11个S奇积。不大于30的S偶积是

1，6，10，14，15，21，22，26。

有8个S偶积小于或等于30。

因为有11个S奇积和8个S偶积，所以在这种情形下，其差为3，不是很大。由此我们指望，对任何n，S奇积的数目大致等于S偶积的数目。换句话说，我们指望，S奇积的数目和S偶积的数目之差，不是很大。

默顿斯把它们之差同n的平方根$\sqrt{n}$进行比较。（在本章稍后，我将指出，$\sqrt{n}$为什么在这里重要。）例如，当n为30时，n的平方根约为5.5，对此你可以用计算器进行检验。所以，

对于直到30的S数，S奇积的数目与S偶积的数目之差，小于30的平方根，因为3小于$\sqrt{30}$。

不用多久就可看到，当你把这张表扩充到（比方说）65时会发生什么情况。你会找到20个不超过65的S奇积和20个不超过65的S偶积。在这种情形下，差为0，小于65的平方根，约为8.1。因此，S奇积与S偶积这两种数的数目之差，也小于我们算到为止的那个数的平方根，在第一种情形下是到30为止，在第二种情形下是到65为止。如果你算到（比方说）100为止，你会找到30个S奇积和31个S偶积，其差为1，我们知道它的确小于100的平方根10。

在从头到尾作类似计算至于10 000之后，默顿斯结论，对一切自然数，这个差“非常可能”永远小于相应数的平方根。(他对哪一种数领先不感兴趣；其结果是，每一种数都有无穷次领先。)

被称为默顿斯猜想的这个结论，由于我在后面说到的重要原因，激励了贯穿本世纪的大量研究。为了描写新的发现，我将引入速记符号。

首先你选一个自然数n。(我们先选了30，然后选了65和100。）然后你求出不大于n的S奇积的数目和S偶积的数目之差。简称这个差为D(n)，我们读作“D n”。正如我们已知，D(30)=3，D(65)=0；正如我们说过的，D(100)=1。我们将用≤这个符号表示“不超过”，或换个说法，“小于或等于”。用我们的速记法，默顿斯猜想为，对每个自然数n，

$$D(n)\leqslant\sqrt{n}。$$

在这个游戏中，比赛是在D(n)和$\sqrt{n}$之间，而不是在S偶积与S

奇积之间进行。

在1897年至1913年期间，L.冯·斯特内克验证了，从头开始一直到5 000 000，默顿斯猜想都是对的。他还注意到甚至比该猜想还要奇怪的事情。对于每一个大于200但不超过5 000 000的n，D(n)甚至还小于n的平方根的一半，即

$$D(n)\leqslant\frac{\sqrt{n}}{2}。$$

或者用小数符号表达，$D(n)\leqslant 0.5\sqrt{n}$。因此，自然猜想，对一切大于200的n，此式成立。但是，正如你可能料到的那样，5 000 000只是一个太小的数，以致斯特内克的猜想可能是错误的。

1979年，亨利·科恩和弗朗梭伊斯·德雷斯对所有直到7 800 000 000的n计算了D(n)，发现当n为7 725 038 629时，D(n)大于n的平方根的一半。因此，冯·斯特内克的猜想是错误的。顺便说一句，对大于200的n，这是D(n)首次超过$0.5\sqrt{n}$。但是，他们没有找到违反默顿斯猜想的例子，事实上，对于他们所考虑的数，D(n)不大于$0.6\sqrt{n}$。

但是，这个故事还没有完。虽然默顿斯猜想对于直到7 725 038 628即大约80亿的所有自然数得到了验证，但最终它却是错的。

1984年，A.M.奥德利兹科和H.J.特·里尔把广泛的理论同大量的计算结合在一起，证明了存在无穷多个数n使得D(n)大于$1.06\sqrt{n}$。如果你想知道一个使默顿斯猜想失败的特定数，我感到遗憾，而你会失望。奥德利兹科和特·里尔说，我们的证明是间接的，不能产生一个单独的n值适合D(n)大

于$\sqrt{n}$。事实上，我们推测，小于10^{20}或者甚至小于10^{30}的数中，没有默顿斯猜想的反例。”假如他们的推测是正确的，那么，甚至最快的计算机在我们的有生之年也可能找不出第一个反例。

但是，为什么说我们玩的两个游戏不只是游戏呢？因为，如果波利亚的猜想或默顿斯猜想是对的，那么，黎曼假设也就得到证实。

黎曼假设断言，平面内借助于微积分和复数定义的一确定的特殊无穷点集，完全位于一确定直线上。虽然黎曼在1859年就提出了这个问题，但仍然不知它是对是错。迄今为止，已经对15亿个点作了验证，但如我们已经看到的那样，15亿是一个较小的数。此外，C.H.哈代在1914年证明了无穷多个特殊点的确位于一条直线上。

黎曼假设是重要的，因为它暗含数论中许多其他结果。例如，如果它是对的，它甚至会向我们提供n大时有关D(n)的大小的信息。默顿斯猜想D(n)小于n的平方根$\sqrt{n}$。换句话说，他猜想，这个商D(n)/$\sqrt{n}$保持小于1。黎曼假设包含，这个商增长非常之慢，比n的任何幂都慢，例如，甚至比$n^{1/100}$还慢($n^{1/100}$是一个自乘100次得n的正数)。反之亦然。即如果D(n)/$\sqrt{n}$确实增长得如此之慢，那么黎曼假设就是对的。所以，我们关于S偶积和S奇积的游戏，实际是一个严肃的问题。然而，没人知道，当n增加时，这个商D(n)/$\sqrt{n}$如何变化。

这个假设仍然作为全部数学中最重要的问题向我们挑战。它像一座无人攀登得上的高山耸立着，尽管许多人为了达到它的顶峰而奋力拚搏过。

你可能在想，“我能理解这个问题会引起数学家的兴趣。我甚至感到它是迷人的。但是，在数学之外的世界它有什么重要性？”第八章的一个例子回答了这个问题。在那里，我讲了一点有关两个大素数的乘积的数论，数学家们从来没有想到它会有实际应用。嗨，你瞧！结果它成了用于传送机密情报的代码的基础。

波利亚和默顿斯的猜想的结局告诫我们，应把一百万，十亿，甚至一万亿视为“小”数。那两个假设有它们自身的兴趣，也因为它们与黎曼假设的联系而引人注意。然而结果是，一个非常重要的实际作用，是让我们相信，我们常常认为是“大”数的某些数，归根到底可能不怎么大。

1977年，里维斯特，夏米尔和艾德雷曼发明了一个编码系统，现已广泛应用于银行业务，武装部队和核发电厂。（在第八章中我讲述了这个系统的基础。）这个RSA码的安全性所依赖的事实是，将一个“大”数分解因子需要很长时间。一个侵入者为了破译这个代码，必须找出一个非机密的确定数的素数因子。

这三位发明者发布了一个被称为RSA129的129位数，并预言，采用当时通用的方法将它分解因子，需要 4×10^{16} 年——那时，太阳将会不再发光。他们还预言，即使采用改进的技术，在21世纪的某个时刻之前，没人能破译这个代码。但是，RSA129在1994年即被揭秘。

在这17年中，由于RSA129的提出，数学家们发明了更快的因子分解方法，而计算机科学家们开发了更快的计算机。这就使得600位互联网的志愿者，在他们的计算机上工作8个

月，实行为将RSA129分解因子所需的10^{14}次运算，成为可能。因此，或许我们应该把一个甚至长达129位的数也视作“小”数，因为基于这样一个数的密码能被破译。为求保险，RSA代码通常是以长达135至150位的数为基础。不久的将来，甚至这些数也可能太小，不足以保证代码的安全。

现在让我们回过头来再看这两个猜想。波利亚关于偶积与奇积比赛的猜想，虽然直到1 000 000还是对的，但结果在906 150 257处却不对了。关于S偶积的数目与S奇积的数目之差的默顿斯猜想，虽然直到7 725 038 628还是对的，但一般说来不对。这就应使我们，在只是基于几百万或几十亿特例而提出的猜测面前，表现迟疑。在我们能够用纸和笔，或计算器，或甚至计算机处理的轻松自在的“小”数世界之外，存在一个无穷无尽的自然数丛林，一个保守着可能永远不会揭露的奥秘的王国。对那个遥远地带的探索，必须借助于深刻的数学理论继续进行。还是会有一些部分，我们可能永远也达不到。我们可能永远不会见到生长于那个奇妙王国的全部珍稀动植物。

第十六章　一辆轿车和两只山羊

几年以前，玛丽琳·沃斯·萨范特在她的一个专栏里提出了一位读者投送的这个智力测验题：

假设你在参加一个游艺节目，让你在三个门中作

一选择。一个门后是一辆轿车；另外两个门后是山羊。你挑选一个门——比方说1号门——同时，知道每个门后是什么的主持人打开另一个门——比方说3号门——展示出一只山羊。然后他问你，“你想挑选2号门吗?”改变你的选择对你有利吗?

她在以后各个专栏中的回答和进一步解释，引来了遍及全国的博士，直到享有盛誉的机构的教授，像雪片般飞来的指责信件。我引述几句，但略去作者们的姓名，因为他们已经够难堪的了。他们是错误的，而玛丽琳是正确的。

△我非常关心一般公众数学技能的缺乏。请你承认错误，就是帮忙……。

△我很震惊，在至少三位数学家给予纠正之后，你还看不出你的错误。

△或许女人看数学问题与男人不同。

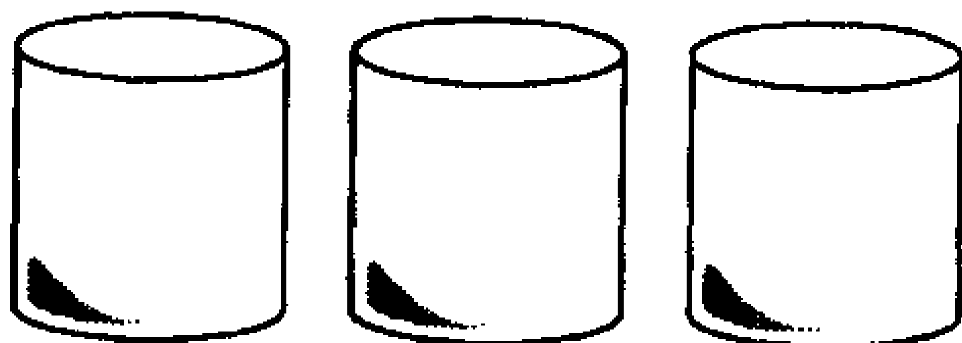
我将不给出答案，因为我在本章的目标，是让你相信，你能够进行数学思考，甚至比某些数学家思路更清晰。我将只提出探讨这个问题的一个方法，一个适用于许多问题的方法。我确信，稍加指导，你就会解答这道智力测验题。

首先，且慢。想一会儿这个问题，把它完全弄清楚。或许你对游戏节目参加者是应该坚持，还是应该改变，或者怎么做都行，会有一个想法。但是，在你固守你的想法之前，先进行下述实验。它将有助于你对这个问题的深入观察。

找出三个完全一样的锡壶，塑料杯或35毫米胶卷筒，或三张完全一样的纸，或三个完全一样的任何不透明容器。我将

就筒来陈述这个实验，因为筒最容易找到。

在三个筒之一中放一张小纸（或者当移动筒时不发出声响的任何东西）。这三个筒表示三个门。这张纸表示轿车，而空筒代表隐藏山羊的门。下图展示这些实验工具。



你装扮成主持人，而你的一个朋友可以扮演节目参加者的角色。（如果你的朋友们太忙，你可以扮演两个角色。只是不到时候不要窥视筒内。）

挪动这三个筒，不让你的朋友看到任何一个筒内。然后让你的朋友挑选一个筒，希望获得放有纸卷的那个。看看另外两个筒内，并拿一个空筒给你朋友过目。但是，一定要你的朋友改变原来的选择。记录这次改变是命中还是失误。把整个实验作 50 次，记录下命中和失误。一张类似于此处所示的表是会有用的。

改变

命中	
失误	

虽然 50 次实验看似很多，但它们进行起来很快。然后总

计命中数和失误数。

接着，作同样的实验 50 次，但现在让这位朋友不改变原来的选择。填一张类似于下面的表。

不改变

命中	
失误	

在完成这 100 个实验之后，你怎么想？两种策略产生类似的命中数？你认为是改变还是坚持更为聪明，或者怎么做都行？你收集的数据是否暗示一种分析这个问题的方法？

最好你的朋友不试图解答这个问题。假如你们两位都想对它进行探讨，情绪可能由理性的平静变为竞争性的激动，而这可能干扰你的专注。

如果在再对这个问题思考一阵之后，你仍不能确定答案，不能予以解释，那么做下面的事情。（注意，只是引用实验数据不是解释。数据可能使你确信什么是正确的，但它们没有给予解释。）

再拿一个筒，用四个筒而不是三个，进行类似的实验。在其中的一个筒里放一个纸卷。在你的朋友挑选一个筒之后，看看其余三个筒内，并拿两个空筒给你的朋友过目。于是，这位朋友在另外两个筒之间面临一种选择。进行和以前同样的实验。好好想想你所得到的结果。它们向你提示什么？你找到了一种方法解释所发生的事情吗？

进行这些实验不仅为你提供某些线索，而且还使你从日常

生活的一般忙乱中解脱出来，这样你就能在一段时间内只专注一件事情。

如果你还是不知道如何解释正在发生的事情，那么用十个筒进行实验。在其中的一个筒里放一个纸卷。在你的朋友挑选一个筒之后，看看其他九个筒内。从这九个筒中拿出八个空筒给你朋友过目，并撤掉这八个筒。又只剩下两个筒。进行类似的实验。

我确信你会解决这个问题，我是如此地确信，以致在本书的任何地方我都没有给出答案，甚至也未将答案以小号字体颠三倒四地藏于书后附加资料之中。你或许会沿着这样一条途径进行，即计算出改变选择会挑中轿车次数的分数和不改变选择会挑中轿车次数的分数。用这两个分数你就能够完满地解释这道智力测验题。于是，你将不得不承认你能够用数学进行思考。你只是需要机会。

第十七章　用两个数你能做五件事情

一天，当我正同我的孙子贾森玩算术游戏时，我问他，“3乘5是多少?”在稍加思索之后他回答，“15”。“正确。那5乘3是多少?”他完全从头开始，最后再次提出15。他没意识到，五个三和三个五相同。毕竟，数的基本性质没有译成我们基因中的密码。由于这个原因，复习一下数系的基础，可能是值得的。因为用两个数你只能做五件基本的事情，所以只有很少几条基本原理。

首先，让我们来弄清楚，为什么 5×3 和 3×5 相同。我们可用小学中引进的自然数的乘法予以解释。“5×3”的意思是，编成 5 组，每组 3 件东西，如图 1。

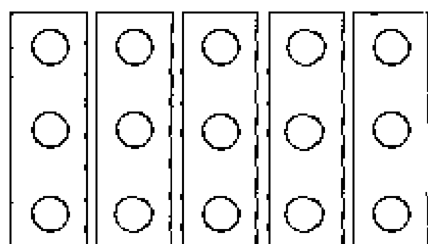


图 1

“3×5”要求我们对这两个数做不同的处理：编成 3 组，每组 5 件东西，如图 2。为什么我的孙子应当看出它们之间任何联系？显然，它们是完全不同的。

当你把图 2 中的圆圈按图 3 所示编组时，你就会看到图 1 和图 2 之间的联系。

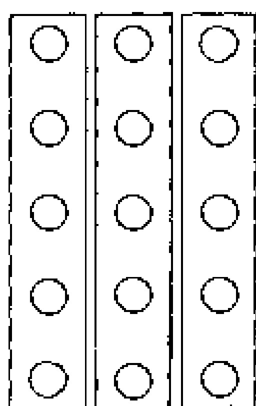


图 2

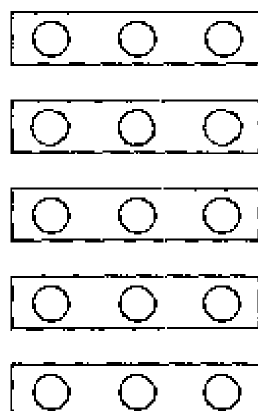


图 3

比较图 2 和图 3，你就会知道为什么 3×5 等于 5×3。一个装着 12 个鸡蛋的纸盒也表明，为什么你可以改变两个数的次序而不改变它们的乘积。我们可以认为这 12 个鸡蛋分成两

组，每组 6 个，或分成 6 组，每组两个，如图 4。

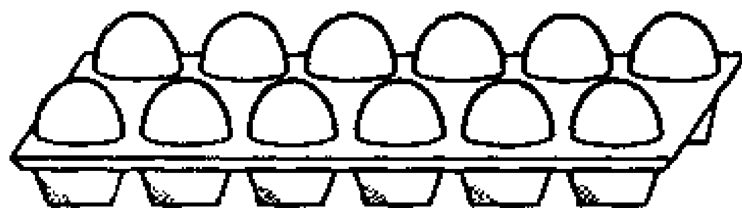


图 4

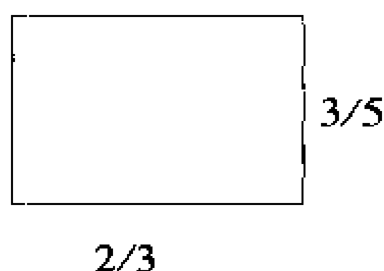


图 5

在某种程度上，这个鸡蛋盒是一种视力幻觉，因为我们可以从两个不同的方向看它。

那么，为什么 3/5 乘 2/3 和 2/3 乘 3/5 会相同呢？没有鸡蛋盒能解释那个等式。然而，如果你把乘法想作求图 5 中矩形的面积，答案就容易了。

那个面积是矩形的两个尺寸的乘积；次序是没有关系的。两数的乘积与书写它们的次序无关这一事实，称为乘法的交换性质。符号表示就是：对任何数 a 与 b，

$$a \times b = b \times a。$$

因为照例都略去字母之间的乘号，这个等式又常写成 $ab = ba$。(但是，略去两数之间的乘号将会招灾惹祸。只须想想把 3×5 写成 35 时你会遇到的麻烦就够了。)

当我们记乘法表时，交换律把我们的工作量削减一半。只要我们知道 6×9 是 54，我们也就知道 9×6 是 54。所以，我们要记的就不是 81 个乘积，而只有 45 个，即 1 至 9 的平方，再

加上第一个因子小于第二个因子的 36 个乘积。但是，乘积 1 ×1，1×2，…，1×9 实际上是不用记的。剩下总共只有 36 个乘积要记。它们是：

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3		9	12	15	18	21	24	27
4			16	20	24	28	32	36
5				25	30	35	40	45
6					36	42	48	54
7						49	56	63
8							64	72
9								81

记住这 36 个乘积，应该没什么大问题。它相当于记一场剧中一个小角色的台词。此外，乘积的样式可以提供记忆的捷径。例如，注意 $6\times8=48$ 比 $7\times7=49$ 小 1，$5\times7=35$ 比 $6\times6=36$ 小 1。如果你已经记住平方数，这种样式便提供一个记忆相差为 2 的两数的乘积的方法：该乘积比处于两数之间的数的平方小 1。（我承认，我对 6×9 和 7×8 感到困难，必须提醒自己哪个是 54，哪个是 56。）

但是，本章的目的不是想在乘法表上大做文章。相反，它是复习用两个数你能做的五种运算，以及这些运算的性质。在一个地方看到它们的全部，将会显示它们的本质和它们相互之间的关系。当学校介绍它们时前后经过 6 年，因而难以获得这样的总体印象。

给定两个数 a 和 b，你可以对它们进行加，减，乘，除，依次得到

$$a+b，a-b，ab 和 a/b。$$

(如我们将在本章后面看到的，若 b 为 0，则商 a/b 无定义。)这个商也被表示为

$$\frac{a}{b}。$$

符号 $a \div b$ 主要出现在小学中和计算器上。我将先讨论这四种运算，然后再进行到第五种，它牵涉到重复乘法。

下面是加法的基本性质：

1. $a+b=b+a$（交换律）

2. $a+(b+c)=(a+b)+c$(结合律)

3. $0+a=a$

4. 对每一个数 a，存在一个记为 $-a$ 的数使得$a+(-a)=0$。

($-a$ 称为 a 的反数。例如，-3 的反数是 3，而 3 的反数是 -3。)

结合律的名称来自这样一个事实：在结合律的一边 b 与 a 结合，而在另一边 b 与 c 结合。这条规律使我们可以去掉括号，简写为 $a+b+c$。

减法不过是加法的小弟。当我们问“$5-3$ 是多少?”时，我们实际上是在问“在 3 上加多少可得到 5?”换句话说，我们要在下面的加式中填充那个方框：

$$3+\square=5。$$

因为 $3+2=5$，我们写 $5-3=2$。当你为买一件价格为 3 美元的物品付给 5 美元时，店员可能会这样查零钱：先说“三”，然后边点数，“四，五”，边出示零钱；这些零钱和物品的价格

相加，便得你放在柜台上的钱数。这个程序把减法转回到原来的加法。

和加法不一样，减法没有值得注意的特性。它不是交换的（5 - 3 不等于 3 - 5）。它不是结合的：7 - （4 - 2） 不等于 （7 - 4） - 2，前一个是 5，后一个是 1。因为它是这样一种不方便的运算，我发现，当作减法时，我必须十分小心。

第三种运算，乘法，和加法一样令人愉快。它所遵从的法则类似于加法的法则。我已经提到过第一个。

1．$ab = ba$（交换律）

2．$a(bc) = (ab)c$（结合律）

3．$1a = a$

4．对每一个异于 0 的数 a，存在一个记为 1/a 的数使得

$$a \times \frac{1}{a} = 1。$$

（1/a 称为 a 的倒数。）

注意，1 在乘法中起着 0 在加法中所起的作用。就像 0 在加法中“没有作用”一样，1 在乘法中“没有作用”。

乘法和加法由分配律联系，

$$a(b + c) = ab + ac。$$

这条规律看起来简单，但它是十分复杂的，因为它涉及三个乘法和两个加法。如果我把它改写为：

$$(b + c)a = ba + ca,$$

也是合理的。这好像是说，“b + c 条狗和 b 条狗加 c 条狗是一回事。”一个更漂亮的看法是几何方法，即考虑图 6 中被分割为两个小矩形的矩形面积。

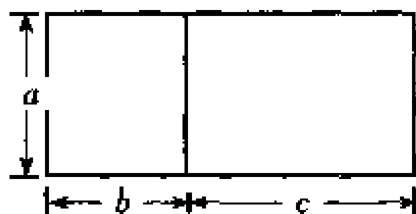


图 6

整个矩形的面积是它的宽度乘它的长度，a（b + c）。但是，这个面积是这两个小矩形面积之和，ab + ac。

分配律是支配加法和乘法的最重要的规律。如果不遵从这条规律，在全国的代数课中，每天将会产生成千上万的错误。

第四种运算，除法，是乘法的小弟。当我们问，“8 除以 4 是多少？”我们其实在问，我们必须用多少去乘 4 才能得 8。换句话说，我们是在填这个等式中的方框：

$$4 \times \square = 8。$$

因为 $4 \times 2 = 8$，我们写 $8/4 = 2$。类似地，因为 $4 \times 1.75 = 7$，我们写 $7/4 = 1.75$。

注意，符号 7/4 表示一个除法的结果，也是一个确定的分数。不会由此招来麻烦，因为当 7/4 表示一个分数的时候，

$$4 \times \frac{7}{4} = 7$$

是正确的。所以，分数 7/4 确实等于 7 除以 4 的结果。

跟减法一样，除法也表现为无规律的形式。例如，它肯定不是交换的，因为 3/5 不等于 5/3。除法的惟一值得注意的特性是，当 a 不是 0 时，$a/a = 1$。

除以 0 是毫无意义的。这是为什么。比方说，要做 4 除以 0，我们必须填这个乘式中的方框：

$$0 \times \square = 4。$$

因为0乘任何数得0，所以我们没有办法填那个方框而得到4。因此，符号4/0是没有意义的。哦，我们可以把它写下来，纸是不会反抗的。类似地，我们可以写"狗拉小提琴"，但那样不会生出一条音乐狗。

由于另一原因，符号0/0是没有意义的。要做0除以0，我们必须填这个等式中的方框：

$$0 \times \square = 0。$$

这是很容易做到的。例如，$0 \times 3 = 0$，$0 \times (-7) = 0$，$0 \times (1/2) = 0$。麻烦就出在太容易上。在这个方框中，你随便填什么数都行。所以，符号0/0不代表一个特定的数。如果你什么时候碰到它，你敢肯定是什么地方出了错。

关于用两个数你能做的五件事情中的前四件就说这么多。为介绍第五件，让我们回忆，至少对自然数而言，乘法可以看作重复加法。例如，4×3可以看作四个3之和：$3 + 3 + 3 + 3$。第五种运算，至少对自然数而言，可以看作重复乘法。

四个3的乘积，$3 \times 3 \times 3 \times 3$，称为"3的四次幂"。这个乘积的标准记号是

$$3^4。$$

在这个表达式中，3被称为底，4被称为指数。你可以检验，$3^4 = 81$。如果b是任何数，n是任何自然数，那么，符号b^n就表示n个b的乘积，

$$b^n = b \times b \times b \times \cdots \times b。$$

这里b是底，n是指数；b^n称为指数式。你可以检验，$2^3 = 8$。人们说，"2的三方等于8"，或"2的三次幂等于8"，或"2的

三次方等于 8"，或"2 的立方等于 8"。注意，b^2 表示 $b\times b$，即 b 的平方，而 b^3 表示 $b\times b\times b$，即 b 的立方。符号 b^1 表示 b 本身，因为不需要作乘法。

下表显示 2^n 的一些值。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

注意 2^n 增加得多么快。n 每增加 1，它就加倍。这样快速的增加，称为指数式增长，它是最近三个世纪中人口剧烈增长的一个合理描述。这是指数的许多应用之一。

对任何数 b 和任何自然数 n 实施的取指数运算 b^n，有两条使用方便的性质，我将称之为和数法则和乘积法则。

下述事实暗示第一个法则。当你以 2 的四次幂去乘 2 的三次幂时，你会得到七个 2 的乘积：

$(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$。

这就表明

$$2^3\times2^4=2^{3+4}\ (=2^7)。$$

(作为检验，2^3 是 8，2^4 是 16，而 2^7 是 128，它确为 8 乘 16。)

和数法则断言，对任何数 b 和任何自然数 m 与 n，

$$b^{m+n}=b^m\times b^n。$$

("b 的两数之和的幂，等于 b 的第一数之幂乘 b 的第二数之幂的乘积。")注意，和数法则把对一个和 m+n 取指数和一个乘积联系在一起。在我介绍第二个指数法则之后，关于和数法则

我还会有许多话要说。

和数法则涉及到一个指数为两数之和，而乘积法则涉及到一个指数为两数之积。

考虑数

$$(2^3)^4。$$

(我们毋须知道它的值，但是你可以验证，它是4 096。)它表示“‘2的三次方’这个数的四次方”，即

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3。$$

但是，每个因子 2^3 等于 $2 \times 2 \times 2$。因此，

$$(2^3)^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)。 \quad (1)$$

等式(1)的右边有四组，每组三个2。这就意味着，右边有 4×3 个2，因为 4×3 等于 3×4，(1)的右边有 3×4 个2。换句话说，

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4},$$

它就是 2^{12}。同样的推理产生一般的乘积法则：对任何底b和任何自然数m与n，

$$b^{mn} = (b^m)^n。$$

乘积法则联系着三个指数式和一个乘积。

迄今为止，我们只是对自然数n定义了 2^n。符号 2^0 的意思应当是什么？我们是主人，我们可以给这符号以我们想给的任何意义。但是，最好是以对我们最为方便的方式来定义它。恰好，对我们最简单的东西，原来也是现实世界最有用的东西。作为我们的指导原则，我们力图使指数的和数法则在指数非自然数时继续成立。作为一个例子，让我们来看，和数法则告诉我们 2^0 应当是什么。

说“作零个2的乘积”，是毫无意义的。但是，要求当指数为0与1之和时和数法则成立，则是有意义的。在这种情况下，我们想要

$$2^{0+1}$$

等于

$$2^0 \times 2^1。$$

简单地说，我们想要

$$2^{0+1} = 2^0 \times 2^1。$$

但是，$0+1=1$，$2^1=2$。因此，上述等式成为

$$2 = 2^0 \times 2。$$

这就告诉我们，2^0 乘2必须为2。只有一个数能作到这点，即1。因此，如果指数的和数法则当一个指数为0时也要成立，那么，2^0 必须是1。我们别无选择。由于类似的原因，我们将有，对任何底b（异于0），b^0 等于1。0^0 这个符号有时需要，定义为1。

让我们来看看，当指数为负数时会发生什么情况。2^{-1}应当是什么？-1的基本性质是，当我们把它加到1上去时，得到0：$(-1)+1=0$。为要和数法则当指数为$(-1)+1$时成立，我们写出

$$2^{(-1)+1} = 2^{-1} \times 2^1,$$

或者，其实都一样，

$$2^0 = 2^{-1} \times 2^1。$$

让我们来看看，它是否会告诉我们，2^{-1}应当是多少。利用2^0为1和2^1为2的事实，我们有

$$1 = 2^{-1} \times 2。$$

只有一个数和2的乘积为1，它就是二分之一。由于这个原因，我们定义2^{-1}为$1/2=0.5$。

更一般地说，对于任何正底b，我们定义b^{-1}为b的倒数。例如，$4^{-1}=1/4=0.25$，而$(1/3)^{-1}$为1/3的倒数，即3。

b^{-2}应当是什么？-2的实质是，当把它加之于2时，得到0，即

$$(-2)+2=0。$$

如果我们想要b^{m+n}等于乘积$b^m\times b^n$甚至在m为-2时也成立，那么我们就必须要求

$$b^{(-2)+2}=b^{-2}\times b^2。$$

但$b^{(-2)+2}=b^0$等于1。因此，我们现在有

$$1=b^{-2}\times b^2。$$

这就迫使b^{-2}必为b^2的倒数。例如，

$$5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}=0.04。$$

类似地，只要n是一个自然数，我们就定义b^{-n}为b^n的倒数。

为了回顾迄今为止我们所完成的工作，让我们来作一个表，对所有从-5到5的指数n，列出2^n的值。（我力劝你检验我的计算。）

n	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
2^n	0.03125	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16	32

指数 n 每上升 1，2^n 的值就加倍。或者，换个说法，指数 n 每下降 1，2^n 的值就减半。这种样式本身便已告诉我们，应当如何定义 2^0，2^{-1}，2^{-2}等等。

对于一个正底 b，$b^{1/2}$应当是多少？噢，关于 1/2 我们知道的一件事情是，1/2 + 1/2 等于 1。如果我们想要和数法则对分指数也成立，那么我们就得有

$$b^{1/2} \times b^{1/2} = b^{1/2+1/2}。$$

因此

$$b^{1/2} \times b^{1/2} = b^1 = b。$$

这就意味着，$b^{1/2}$必须是 b 的一个平方根。（我们选取正平方根，以保持指数式的值为正。）例如，$25^{1/2}$必须是 5。作为另一个例子，$2^{1/2}$是 2 的平方根，它大约是 1.414。

我使用了指数的和数法则，计算出 $b^{1/2}$应当是多少。你可能感到疑惑，“如果改用乘积法则会怎样呢？毕竟有（1/2）× 2 = 1。它就和（1/2）+（1/2）= 1 一样基本。”让我们看看，乘积法则告诉我们 $b^{1/2}$应当是多少。如果它给出一个异于 b 的平方根的数，那肯定会把事情搞乱。

首先，我们想要乘积法则当指数为 1/2 和 2 时成立，即

$$(b^{1/2})^2 = b^{(1/2)\times 2}。$$

这个等式是说，

$$(b^{1/2})^2 = b^1$$

因为 $b^1 = b$，我们看到，$b^{1/2}$应当是 b 的一个平方根。很幸运，这恰好是指数的和数法则告诉我们的。

使我感到惊奇的是，求一个数的平方，立方，倒数，或平方根，全都只是指数式的特例。甚至更为令人惊奇的是，三角

学原来就是两个指数式的和与差的研究。欧拉的这个发现，有赖于微积分和复数。

当指数为任何分数时，都可能定义指数式运算。和数法则与乘积法则会告知其值应当是什么。例如，你可能想要弄明白，为什么 $8^{1/3}$ 应当是 2。然后，你认为 $8^{2/3}$ 应当是多少？$16^{-1/2}$ 又是多少？如果你的计算器上有一个指数式键，你可以把你的看法同计算器显示的结果进行比较。

这就完成了用两个数你能做的五件事情的概述。在某种意义上来说，一切都来自加法，至少对自然数是如此。首先，乘法是重复加法。指数始于重复乘法。减法和除法只不过是看待加法和乘法的不同方式。一句话，它概括了算术的本质。

第十八章 一个和数

如果你从 1 开始，加 2/3，然后加 $(2/3)^2$，然后再加 $(2/3)^3$，然后又加 $(2/3)^4$，如此等等，不断加上 2/3 的高次幂，永无休止，会发生什么情况呢？这些和会变得很大吗？它们会变得超过 10 吗？会超过 100 吗？毕竟，你每加另一个数，这个和就变大。或者，这些特殊的和永远不会变得很大？本章指出，它们保持适当的小。更有意思的是，本章甚至找出了这些和实际上越来越与之接近的那个数。在第十九章，谈到银行业务时，我们将把这一发现付诸实际应用。

本章以一种特殊的风格写成，试图帮你练习如何理解数学语言。我同时扮演两个角色：作者和读者。作为一个读者，我

要指出，为了理解我所读的内容，我要做什么。作为一个读者，我的思想体现在画线的文字中。

我打算阅读数学，因此我要准备好纸，铅笔和计算器。我不愿让这家伙在我面前漏掉什么。

本章的目的是证明，若 r 是一个介于 1 和 – 1 之间的数，即 $-1<r<1$，则

$$1+r+r^2+r^3+r^4+\cdots=\frac{1}{1-r}$$

这三个点表示"不断加上越来越多的类似项，例如 r^5，r^6 等等"。你加得越多，这个和就越接近于 1/（1 – r)。这个序列 1，r，r^2，r^3，r^4，…被称为几何序列，一个至少可以回溯到柏拉图时代的名称。数 r 称为它的公比。

他在说什么？我将用 r = 1/2 试试，因为 1/2 是一个介于 – 1 和 1 之间的数。这家伙断言，

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots=\frac{1}{1-(1/2)}$$

让我看看。我将用我的计算器：

$$1+\frac{1}{2}=1+0.5=1.5$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1.5+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1.5+\frac{1}{4}=1.75$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=1.75+\frac{1}{8}=1.875。$$

只用四项我已经得到 1.875。他说，如果我不断地加，我将使它越来越接近 1/（1 –（1/2））。那么 1/（1 –（1/2））是多少呢？我将把它算出来：

$$\frac{1}{1-(1/2)}=\frac{1}{1/2}=2。$$

好啦，1.875是比较接近于2，所以可能他是对的。但是，等一等。如果我不断地加，我的和数会不会变得越来越大，以致它们甚至大于2呢？我将再加上几项，看会发生什么情况，比方说，再加四项吧。因此，我将加上和数

$$(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^5+(\frac{1}{2})^6+(\frac{1}{2})^7,$$

它是

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=0.03125+0.015625+0.0078125$$
$$+0.00390625$$
$$=0.05859375。$$

将这数加到1.875上去，得到总计数为1.93359375。好啦，很接近2。而且没有迹象表明这个和会变得超过2。不管怎样，有可能这家伙是对的。我将像一只鹰一样注视着它。

但是，等一等。他还说r可以是负数。那时会发生什么情况呢？我将用r＝－1/2来试试。这次他的断言是

$$1+[-\frac{1}{2}]+[-\frac{1}{2}]^2+[-\frac{1}{2}]^3+\cdots=\frac{1}{1+(1/2)},$$

即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{2}{3}。$$

我用六项来看看这是不是合理：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=1-0.5+0.25-0.125+0.0625$$
$$-0.03125$$
$$=0.65625。$$

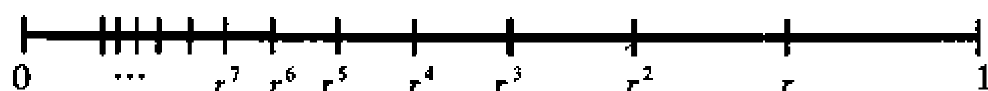
对了。它是很接近2/3，即大约0.666，所以可能他是对的。

我还是想不出它为什么是正确的。他必须让我相信。

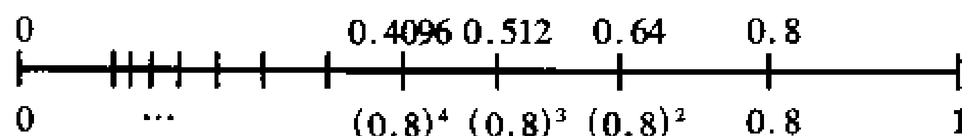
首先，只考虑 r 为正数的情形。这些数 r，r^2，r^3，r^4，…变得越来越小，向 0 收缩。例如，0.9 的 50 次幂大约是 0.005。

这没什么值得惊奇的。我已经在我的计算中看到这点。

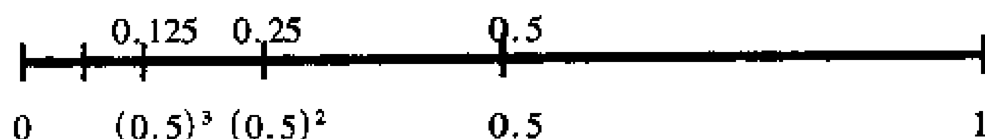
现在标出数 1，r，r^2，r^3，r^4，…在数直线上的位置，如下图。



我不知道他为什么要这样做，但这个图看来是正确的。这是我自己就 r = 0.8 作出的图。

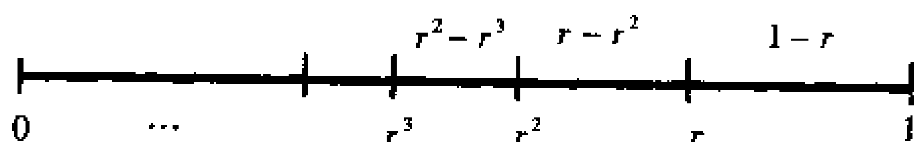


当 r = 0.5 时，我作出下面的图。0.5 的幂确实比 0.8 的幂接近于 0 快得多。现在我已对他的下一个信息作好准备。



从 0 到 1，长度为 1 的线段被分割成了无穷无尽的一串小线段。例如，右边的第一个线段，从 r 到 1，其长度为 1 - r。下一个线段，从 r 到 r^2，其长度为 r - r^2。再下一个的长度是 r^2

$-r^3$，如此等等。下图记录了这些长度。



因为整个线段的长度是 1，所以全部小长度之和是 1。按这些长度在图中的顺序把它们写出来，我们得到：

$$\cdots+(r^2-r^3)+(r-r^2)+(1-r)=1。$$

倒过来改写这个等式，我们得到：

$$(1-r)+(r-r^2)+(r^2-r^3)+\cdots=1。\qquad(1)$$

但是，$1-r$ 是每一项都有的因子。例如 $r-r^2=(1-r)r$，$r^2-r^3=(1-r)r^2$。从等式（1）的每一项中提出因子 $1-r$，把它改写为：

$$(1-r)(1+r+r^2+r^3+\cdots)=1。\qquad(2)$$

以 $1-r$（不为零）除等式（2）的两边，我们得到：

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r},$$

如我们开头所断言的那样。

好美妙的戏法。他画了一个图，结果就出来了。但是，他没抓住要点。在此例中，他根本不用画任何图。事情比这简单得多。我对等式（1）凝视片刻，它变得水晶般明亮。实际上，一切都相互抵消了。r 与 $-r$ 抵消，r^2 与 $-r^2$ 抵消，如此等等，

$$(1-\not{r})+(\not{r}-\not{r^2})+(\not{r^2}-\not{r^3})+\cdots=1。$$

惟一留下的项就是第一项，1，它没有可与抵消的。这就是为

什么等式（1）的左边所有的项加起来等于1。

这家伙必须做的全部事情，就是写出（1），提出因子 $1-r$，以 $1-r$ 除两边，从而完事大吉。根本不需要图形。

我的论证甚至更好，因为甚至当 r 为负数时，它也有效。在这种情况下，他的图形没有任何用处。可怜的家伙，他对此无能为力。

我想知道，如果我们让这个和数停止在某个地方，会发生什么事。例如，关于

$$1+r+r^2+r^3+r^4,$$

是否有一个简明的公式？（请读者做点实验。）

是的，有。我用我的方法，写出

$$(1-r)+(r-r^2)+(r^2-r^3)+(r^3-r^4)+(r^4-r^5)。$$

除了1和 r^5 之外，一切都相互抵消：

$$(1-\not{r})+(\not{r}-\not{r^2})+(\not{r^2}-\not{r^3})+(\not{r^3}-\not{r^4})+(\not{r^4}-r^5)。$$

所以我得到

$$(1-r)+(r-r^2)+(r^2-r^3)+(r^3-r^4)+(r^4-r^5)=1-r^5。$$

如前提出因子 $1-r$，并用它去除两边，我就得到

$$1+r+r^2+r^3+r^4=\frac{1-r^5}{1-r}。$$

一般规律是显而易见的：对任何自然数 k，

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}。$$

我不知道他为什么不先做这个计算？哦，这只是个爱好问题。

不，这不只是一个爱好问题。我想要偏爱几何思考的读者对这个推理感到惬意。实际上，你的和我的方法都可以用，任

何读者对此应当高兴。如果想找一个甚至更为简单的几何方法，你可以现在就去看第三十二章。

既然我们有了几何级数之和的简明公式，那就到了说出它在各方面的应用的时候。我已经提到它在下一章讨论银行业务时有用。在第二十八章，我们需要用它来测量曲线的陡峭度。在第三十章，它是求一些曲线之下的面积的工具。最后，在第三十一章，它帮助我们证明，一个圆的周长与所有奇自然数的倒数有关。几何级数还有许多其他的应用，包括从确定药品的配料到退休金的金额。

为什么他开头不把这告诉我？我会更认真地对待它。我愿意知道我在干什么。不过，迟告诉总比不告诉好。嘿……为什么一个圆会与所有奇自然数有关？

但是，我确实还有一件事情要说，我不想要读者认为，每当我们源源不断地累加趋于0的正数时，它们的和总会保持小于某一固定的数。

14世纪的法国数学家尼古拉·奥雷斯默想要知道，如果他不断累加自然数的倒数，将会发生什么情况。这就是所谓调和级数：$1/1+1/2+1/3+1/4+\cdots$。它的前几个和数是

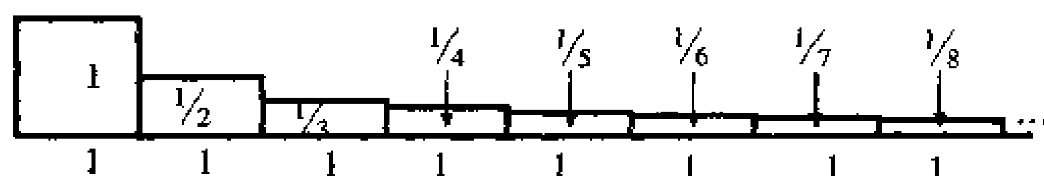
$$\frac{1}{1}=1.000$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=1.500$$

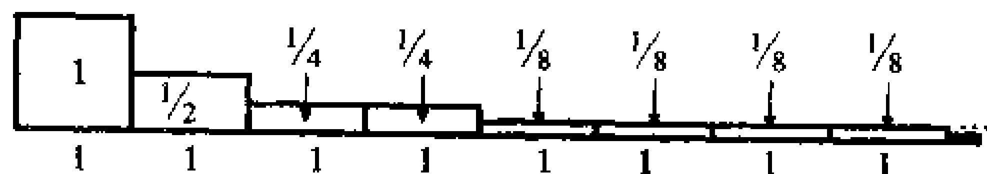
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1.833。$$

当我第一次遇到这个序列时，我作了一些计算，然后与人打赌，说这些和保持小于13。我赌输了。如奥雷斯默所指出的，

这些和可变得任意大。下面两个图形表明他的推理。



每个矩形的宽度都是 1，而高度等于一个自然数的倒数。最大的矩形面积为 1，第二个面积为 1/2，第三个面积为 1/3，如此等等。我们想要知道，这个无限阶梯的总面积是有限还是无穷。为了证明它是无穷，我们来审视下面这个阶梯，它完全位于前一阶梯之内。



这个阶梯有一个面积为 1 的正方形，一个面积为 1/2 的矩形，2 个面积为 1/4 的矩形，4 个面积为 1/8 的矩形，8 个面积为 1/16 的矩形，16 个面积为 1/32 的矩形，如此等等。所以它的总面积是

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\frac{16}{32}+\cdots$$

即

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,$$

无穷多个 1/2 之和。因为累加越来越多的 1/2 将超过任何数，

所以第二个阶梯的面积为无穷。从而，第一个阶梯的面积也是无穷。这就意味着，所有自然数的倒数之和为无穷。我们应该为几何级数之和有限感到高兴。

但是，

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots$$

会怎样呢？

我留给你这样一个问题：当你累加越来越多的项时会发生什么情况？这些和是变得很大很大，还是越来越靠近某数？

没有简单的常规的方法可用以确定一个正数序列之和是有限还是无穷，向人们提出了许多挑战，从而也就使数学永远保持活力与迷人。

第十九章　无中生有

我常常对钱是从哪里来的感到迷惑不解。毕竟，当我们的国家还是一个婴儿时，几乎没有什么钱。现在却有几万亿元。最后我决定找出答案，请教某些经济学教授。他们的回答是如此的荒谬，以致我认为他们是在愚弄我。于是，我便去读一本经济学教科书。使我大吃一惊，这本书提出了与教授们同样的解释。当然，创造美元的明显方法是政府印刷纸币和铸造硬币。但是，另有一个制造金钱的方法，而且我很高兴，它和几何级数纠缠在一起。它牵涉到银行。

原来，银行能够从似乎无人知道的地方赚钱。不是魔术。

这种策略优于伪造货币，其理由有二：它不需要印刷厂，而且它是完全合法的。但是，它依赖于人们对未来的信念。我们来看它是如何运转的。

一个银行必须保持一定的储备，以满足储户的日常需要。设想这些储备是金库里的现金。如果所有的储户都担心这个银行将破产，并要求把他们的账户转为现金，这个银行可能就没有足够的储备来满足他们的需要。银行便会陷入窘境，储户愤怒。但是，如果没有这样的大恐慌，银行便有足够的储备，适应它的储户的平常的需要。

哎呀，有时所有的储户都对未来失去信念，想要从信用银行取出他们的钱。于是，就发生向银行挤提存款的风潮或大恐慌。这事曾发生在大萧条时期，而联邦政府在 1933 年 3 月宣布了一个银行节，于是银行就有一个不付款的好借口：他们停止营业了。几个星期之后，有偿付能力的银行获准重新开业，信任就逐渐回到了银行系统。

幸好，人们通常都信任他们的银行。他们相信，如果他们想要把自己的账户转为现金，他们就能。为了保持这样一个幻觉，银行家们穿着保守，而银行的建筑物照例都是让人放心的，大理石的地板，大理石的墙壁和大理石的柱子，像一座希腊庙堂。其实，把银行设计得像一个拉斯维加斯赌场，更为直截了当，但那样就会破坏幻觉。

联邦储备局要求银行保留存款的一定部分作为储备，而让银行把其余部分贷出。为了我们的目的，让我们假定银行必须保留 20%或 1/5，可以贷出其余的 80%或 4/5。请注意，看会发生什么情况，因为这就是我在书上看到它以前无法相信的作用。

比方说，乔·布洛走进信用银行，存款1 000美元。银行保留200美元，而把800（1 000的4/5）美元贷给简·多伊。简把800美元存入信用银行或另一银行。该银行保留800美元的20%作为储备，而把640（800的4/5）美元贷给艾丽斯。

魔术演出已经开始。乔认为他有1 000美元，简认为她有800美元，艾丽斯认为她有640美元。开始只有乔·布洛的1 000美元。现在，无中生有，有了1 000美元 + 800美元 + 640美元 = 2 440美元。真是一个美妙的戏法。而且，这些银行还赚得它们创造出来的钱的利息。显然，银行业是一件非常令人开心的事业。

现在，艾丽斯把她的640美元存入银行。然后，银行把512（640的4/5）美元贷给林勒斯。接着，林勒斯又存入这512美元，使信用银行可以贷给马德琳409.60（512的4/5）美元。如此等等。让我们来看看，假如这样继续进行下去：存，贷，存，贷，永无休止，最终总计钱数是多少。是否可能从开始的1 000美元创造出无穷量的钱。看吧。

这一过程开始于1 000美元的存款。然后，有800美元，它等于(4/5)1 000。再后，出来640美元，它是800美元的4/5，即

$$\left[\frac{4}{5}\right]\left[\frac{4}{5}\right]1\,000=\left[\frac{4}{5}\right]^2 1\,000=640。$$

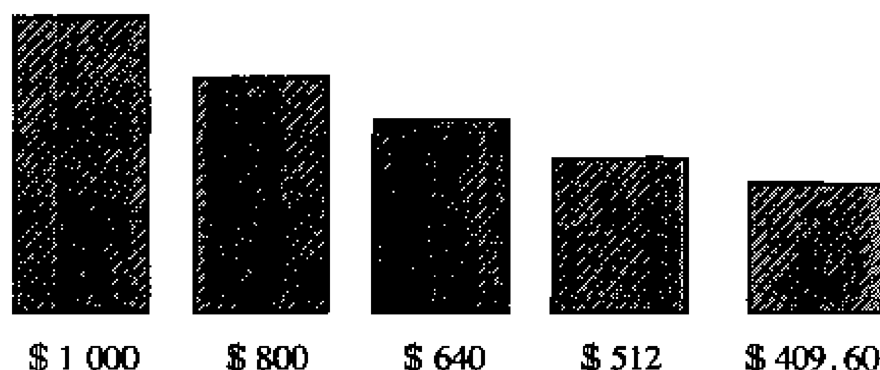
然后，又出来512美元，它是上面那个数的4/5，即

$$\left[\frac{4}{5}\right]\left[\frac{4}{5}\right]^2 1\,000=\left[\frac{4}{5}\right]^3 1\,000=512。$$

在每一阶段的贷出数量，是4/5乘上次的贷出数量。所以，银行贷出的总量是无穷和

$$1\,000+\left[\frac{4}{5}\right]1\,000+\left[\frac{4}{5}\right]^2 1\,000+\left[\frac{4}{5}\right]^3 1000+\left[\frac{4}{5}\right]^4 1\,000+\cdots\cdots。$$

下图显示所涉及的一笔一笔的钱。



我们想要知道，这个和数是有限还是无穷。如果它是有限的，是多少？从每一项提出因子1,000，我们得到

$$1,000\left[1+\left[\frac{4}{5}\right]+\left[\frac{4}{5}\right]^2+\left[\frac{4}{5}\right]^3+\left[\frac{4}{5}\right]^4+\cdots\cdots\right]。$$

括号中的和是一个几何级数，我们已在第十八章研究过。它的和是

$$\frac{1}{1-(4/5)}=\frac{1}{1/5}=5。$$

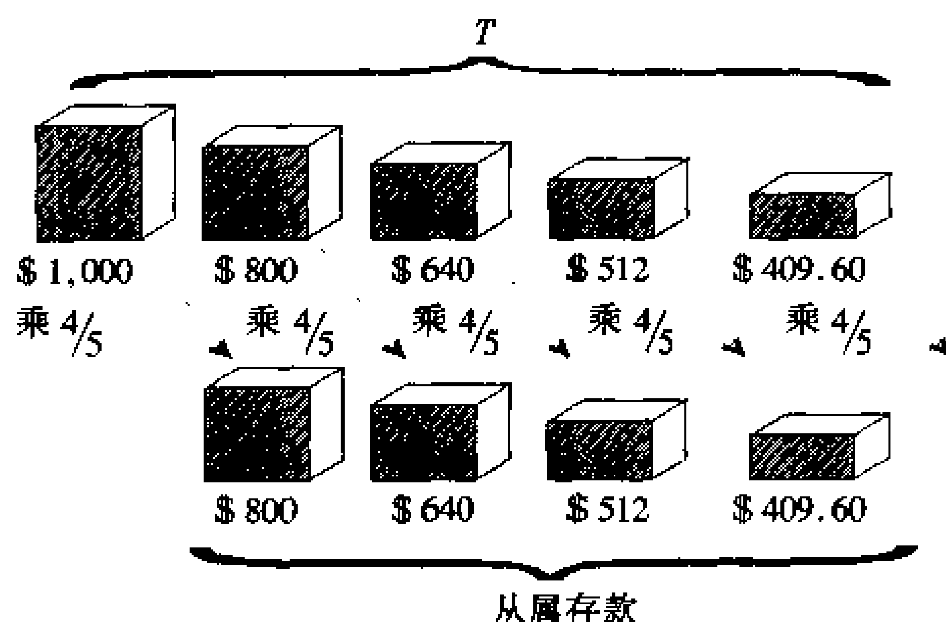
这就意味着，乔，简，艾丽斯，林勒斯，马德琳等人认为他们拥有的钱数的总和是 1 000 美元 × 5 = 5 000 美元。（经济学家称 5 为收益增殖率。这个增殖率与必须保留作为储备的百分比有关。特别，它是那个分数的倒数。）

哪里有 1 000 美元，哪里最终就会有 5 000 美元。无论如何，信用银行不能从 1 000 美元赚得无穷量的钱。这倒让人放心。它只是从这个把戏中拿走 4 000 美元。

本章的一位读者认为，所有这些都不过是文学作品。“从银行贷多少最终必须还回多少，还得加上利息。”贷款确实要还，甚至还要加上我说的这种方式创造出的更多的钱。我劝怀疑者去参考任何一本中级经济学教科书。

另有一种方法，可以看出 1 000 美元如何变成总数 5 000 美元。我们不需要几何级数。但是，我们必须假设，总数是有限的。这是一个很大的假设。如果我们使用几何级数，我们就毋须假设总数有限。

称总数为 T。因为它是有限的，所以我们可用它作算术和代数运算。（我们已经看到，它最终变成了 5 000 美元，但我们假装不知道。）T 是由最初的 1 000 美元存款，以及所有后继存款组成的。称后面这些存款为从属存款。每一次从属存款是上一次存款的 4/5。下图描述这种情况。



所有从属存款之和是（4/5）T。于是，总存款 T 便是最初

的1 000美元存款和所有从属存款（4/5）T之和。换句话说，

$$T = 1\ 000 + \frac{4}{5}T。$$

余下的所有事情就是求解这个关于T的方程。

我们不喜欢分母，故以5乘两边，得到

$$5T = 5\ 000 + 4T。$$

两边减去4T使我们得到

$$T = 5\ 000。$$

于是，我们已把所有的存款加在一起，间接地证明了它们总共是5 000美元。这意味着，我们已经发现

$$1 + \frac{4}{5} + \left[\frac{4}{5}\right]^2 + \left[\frac{4}{5}\right]^3 + \left[\frac{4}{5}\right]^4 + \cdots\cdots = 5。$$

换句话说，信用银行向我们提供了一个求几何级数之和的新方法。就像无中生有地赚钱一样，这是不可思议的。（这方法对介于0和1之间的任何数r都有效，不只是4/5。但是，请记住，在使用这个方法时，我们必须预先假设T是一个有限数。）

你的脑子里可能会有一个疑问，“为什么我不能开办银行呢?”你将不得不去请教经济学教授们。他们大概会给你一套资料或一本手册。

第二十章　一切为了了解分数

当我的小女儿苏姗娜念五年级时，显然，她的老师虽在教

别的课时很有效率，但却不喜欢数学。数学课经常被挤占，以便腾出时间用于其他。有时几天不上一次数学课。我定期参观这个班级并帮助解决难题的提议被愉快地接受了。

使我大吃一惊的是，教室里没有可用以说明分数意义的物体——没有量杯，没有直尺，没有所谓手动操作的任何器具。学习是抽象的，就像代数拓扑方面的研究生课一样。除了几个众所周知的馅饼被切成相等的几片的图形之外，几乎没有什么供学生看的东西。理想的情况是，教室里应该有大量的道具，例如直尺和量杯等。作为一个开端，我起码能作一条数直线和一个分数盘。

为了作一条数直线，取一张大约 10 呎长 6 吋宽的纸。在纸上画一条长长的直线，在中心附近写一个 0，在 0 的右边约 2 呎处写一个 1，并在直线上标出一些常见的整数和分数所在。它可能貌似图 1。

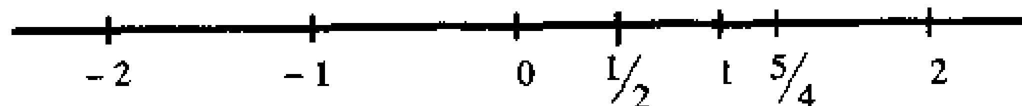


图 1

你可以显示出分母从 2 至 5 甚至更大的分数。甚至包括几个大分母的分数，例如 230/95 和 231/95，以表明它们可以多么接近。当把这钉到家里或学校的墙上时，孩子们就会看到例如

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6},\ 1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}$$

之类的东西。这些等式说明一个作为分数核心的概念：不同的

分数可以有相同的值。我把负数也放在直线上，以表明直线向两个方向延伸，向右和向左。

注意，一个分数不一定小于 1，但在日常生活中总是。在学校里，一个大于 1 的分数，例如 7/5，称为假分数，就好像这个分数作错了什么事似的。我对把它变成带分数 1 + 2/5，写成 $1\frac{2}{5}$，没有激情。正如你在后面会看到的，当你要作分数乘法时，保留它们的分数形式，常常更为方便。例如，7/5 乘以 8/3 比 $1\frac{2}{5}$乘以 $2\frac{2}{3}$容易得多。

分数盘也是容易做的，我做了一个，使得学生们可以触摸到某种东西，并来回移动。我从标签纸板上剪下一个大约 1 吋宽 12 吋长的板条。我在它上面写一个 1，作为单位。然后我从不同颜色的标签纸板上剪下两条，每条宽 1 吋长 6 吋，并在其上标出 1/2。类似地，我作三块 4 吋长的板条，标上1/3，和四块 3 吋长的板条，标上1/4。我对直到 12 的所有分母都如法炮制。（不方便的分母，如 5 和 7，会比好的分母，如 6，8 和 12，带来稍多一点的麻烦，但是我作它们的近似作得很好。）我把所有这些板条都安装在一个框架内，如图 2 所示。

图 2

假如我有更多的时间，我就会让一些学生做这样的分数盘。类似的盘可以买到，但只有较少的分母。

将这个盘放在一个书桌上,我向一名学生提出这样一些问题:

哪个大，1/2 还是 1/3?

哪个大，2/3 还是 1/2?

哪个大，2/4 还是 3/6?

哪个大，5/8 还是 2/3?

这名学生看着这个盘,或者拿出几条,来回移动,据以回答问题。

我的下一个问题就不那么容易了，“哪个大，5/7 还是 7/10?”如图 3 所示，这两个数几乎相等。

1/7	1/7	1/7	1/7	1/7		
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

图 3

这名学生怎样才会确信这个答案呢？一个办法是使用计算器，把两个分数变成小数。但是，一个刚学分数的学生是看不懂计算器的显示的，因为它是小数。在你学习小数之前，你必须了解分数。(至少在不用米制测量长度的美国，你要这样做。)例如，0.35 是 35/100 的简写。

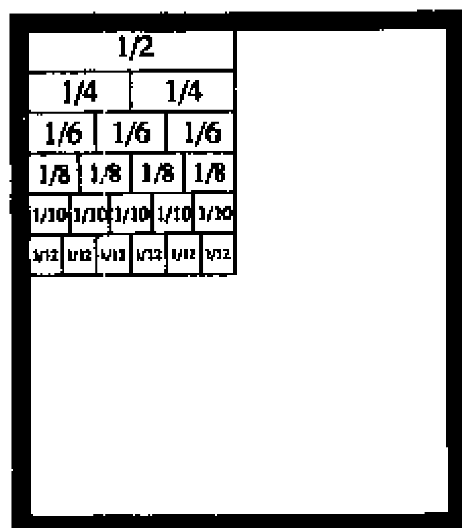


图 4

有一个确定大小的简便方法，它依赖于等价分数或相等分数的概念。为了引进这一概念，我问，“利用分数盘，你能找出等于 1/2 的其他分数吗？在盘上把它们指出来。”

学生们展示

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}。$$

图 4 表明，如何用分数盘上的一些小块来说明这个观点。

等价的分数描述数直线上的同一点。用算术的术语来说，它们是同一有理数的不同名称。一个有理数，就是一个能够表示为分数，且分子分母都是整数的数。特别，每个自然数都是分数。例如，13 可以写成分数 13/1。（第二十一章面对这样一个问题，“每一个数都是分数吗?”）

在日常生活中，我们不用有理数这个词。我们只用分数。也就是说，我们称一个能用分数描述，且分子分母都是整数的数为分数。虽然两次使用分数这个词不会产生困难，但意识到我们是在两种意义下使用这个词是一个好主意。

学生们找出了一些等价于 1 或 2/3 的分数。于是，我觉得学生们已经易于赞同这条重要的原理：分子分母乘同一数，不改变分数值。（是的，如果学生们已对某事物的理解有所准备，你告诉他们相关知识，那是绝好的。）借助于这个思想，你就很容易比较 5/7 和 7/10。

改写这两个分数，使它们的分母相同。用起来最简单的分母是 7 乘 10，或 70。我们有

$$\frac{5}{7}=\frac{5\times10}{7\times10}=\frac{50}{70} \quad 和 \quad \frac{7}{10}=\frac{7\times7}{10\times7}=\frac{49}{70}。$$

现在容易看出，5/7 大于 7/10，因为 50 大于 49。

分数盘也有助于作加法。求分母相同的分数之和，例如求

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7},$$

是容易的。只要分子相加就可以了。（“三只狗加两只狗等于五只狗。”）和为 5/7。但是，求和数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

就不能这么快了。（存在这样一种诱惑：“分子和分子相加，分母和分母相加”，得 2/5。但 2/5 是不正确的：它小于两个被加数之一 1/2。）学生可能组成两个板条的“火车”，如图 5，以表示这个和。

1/2	1/3

图 5

学生沿分数盘移动这列火车，直到它与一个适当的长度相当，如图 6。

1/2			1/3	
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

图 6

这就表明，该和数为 5/6。在再有几个像这样的例子之后，学生可能发现，相加两个分数的最简单的方法，是将它们改写，使其分母相同。（如果学生没注意到这个一般原则，我自己会予以叙述。）毋须使用分数盘，我们有

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}。$$

显然，公分母的概念，对于比较两个分数的大小和将两个或多个分数相加，都是关键。我不为求最小公分母而烦恼。没有必要这样精致或节约。自动地找一个公分母是如此之易：只

须将两分母相乘。为什么要把生活搞得不必要的沉闷乏味？

请看我怎样求

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}。$$

我将 6 和 4 相乘，得 24。于是我有

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times4}{6\times4}=\frac{20}{24}$$

和

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times6}{4\times6}=\frac{18}{24}。$$

由此我得

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{20}{24}+\frac{18}{24}=\frac{38}{24}。$$

我承认，38/24 不是既约分数，但那又怎么样呢？如果需要，我能把它约简。对 38/24 感到不舒服的任何人，可以把它约化成 19/12，以获得满足。最后，讨厌假分数的人，可以把它写为 $1\frac{7}{12}$。

当然，我可以在那个加法中用 12 作为公分母，但是那会需要花费更多的心思。在作算术时，我要的是自动化，而不是哲理性。

减法是类似的。例如，

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{2}{24}。$$

关于分数的乘法与除法怎么样呢？奇怪，两者原来比加法和减法还简单。在这两种情况下，都没必要改变分母。

如何解释分数的乘法？我会提醒学生们，2 × 3 表示“两

个三”。然后，我也许会从这样一些问题开始：

1/2 的 1/2 是多少?

1/3 的 1/2 是多少?

1/2 的 1/3 是多少?

这些均可借助于分数盘来回答。在再有一些与此类似的问题之后，就可以叙述一般原理：两个分子都是 1 的分数的乘积，是一个分子为 1，分母为两分母乘积的分数。

但在此后，我问，“3/5 的 1/2 是多少?”学生们知道

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}。$$

同时，

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$$

是它的三倍。所以，

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}。$$

然后，学生便可求得

$$\frac{7}{2}\times\frac{3}{5},$$

因为它是 $1/2\times3/5$ 的七倍。所以

$$\frac{7}{2}\times\frac{3}{5}=7\times\frac{3}{10}=\frac{21}{10}。$$

在更多的与此类似的例子之后，学生或我就可叙述一般原理：为乘两个分数，只须分子和分子相乘，分母和分母相乘。

我们看到，乘两个分数是十分容易的。遗憾的是，许多孩子想用分子相加和分母相加的办法来作两个分数相加。正如我

们已经看到，分数的加法比这复杂得多。为使学生认识到他们希望的捷径是不对的，让他们用它来求世界上最简单的分数和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}。$$

他们会得到2/4，它等于1/2。但是，一半加一半不是一半。

在加法，减法和乘法之后，接着来的是分数的除法。理解除法的关键，是分数乘法的一个简单性质。我将用一个例子来介绍这个原则。

$$\frac{2}{9}\times\frac{9}{2}$$

是多少？按分数相乘的法则，

$$\frac{2}{9}\times\frac{9}{2}=\frac{18}{18}=1。$$

类似地，

$$\frac{1}{4}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{4}=1。$$

这只不过是说，“四的四分之一是一，”从数直线上来看，这是合理的。然后，几个类似的例子导致另一基本原则：一个分数和将它“上下颠倒”而得的分数之乘积恰好是1。

在讨论分数除法之前，我想先用一点时间讨论整数除法。我们说“6除以2得3”是什么意思呢？我们是在提这样一个问题，“2乘多少得6?”换句话说，我们是在问，在等式

$$2\times\square=6$$

的方框中应该是什么数。这就是我们所说的，“2的三倍是6”。

那么，7/10除以2/9是多少？用数直线或分数盘的语言来说，这是在问，“沿着7/10可以放多少个2/9?”图7表明，

可以放三个多点。

2/9		2/9		2/9		
1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

图 7

所以，7/10 除以 2/9 应在 3 与 4 之间的某处。这将作为对我们为获得精确答案而即将进行的计算的验证。

我们想要填充等式

$$\frac{2}{9}\times\square=\frac{7}{10}$$

中的方框。为了使这方框单独出现，我们必须去掉摆在它前面的 2/9。为此，以 9/2 乘这等式的两边：

$$\frac{9}{2}\times\frac{2}{9}\times\square=\frac{7}{10}\times\frac{9}{2}。$$

但是

$$\frac{9}{2}\times\frac{2}{9}=1。$$

所以，我们有

$$1\times\square=\frac{7}{10}\times\frac{9}{2}。$$

因为 1 乘任何数得该数，我们有

$$\square=\frac{7}{10}\times\frac{9}{2}。$$

这就告诉我们，7/10 除以 2/9 得自于“将 2/9 上下颠倒，而将 7/10 乘以 9/2”。答案是

$$\frac{7}{10}\times\frac{9}{2}=\frac{63}{20}。$$

现在，63/20是3 + 3/20，比3大一点，与我们在这问题开始的观察一致。

简单地说，

$$\frac{7/10}{2/9}=\frac{7}{10}\times\frac{9}{2}=\frac{63}{20}。$$

顺便说一下，我将永远，永远不写

$$\frac{7}{10}\div\frac{2}{9}。$$

从代数往后，符号“÷”在数学中就废弃不用。

我感到惊奇，分数的除法比它们的加法还容易。只要我们懂得为什么“将一个分数上下颠倒然后相乘”是合理的，那么，机械化的程序几乎毋须思考。

假如我们知道如何加，减，乘整数，我们就能很容易地加，减，乘，除分数。加减的关键是使两分数有共同的分母。只须把握两个原则。第一，分子分母乘同一数，不改变分数值。第二，一个分数和将它“上下颠倒”而得的分数之乘积为1。

分数的算术就是这些。没有理由对它们大惊小怪。

第二十一章　每一个数都是分数吗?

为把一颗人造卫星放在围绕地球的轨道上，你必须给它大约每小时17 717哩的速度。但是，为把一个有效载荷送到外层空间运行，并且永不掉回地球，你必须至少以大约每小时

25 505哩的速度把它发射出去。这两个数的比值是25 055/17 717，约为1.414。1.414这个数只是近似于逃逸速度/轨道速度（逃逸速度就是克服地球引力的速度——译注）。物理学家已经用微积分找到，这个实际的比值是$\sqrt{2}$，2的平方根。而且，这同一比值也适用于从任何天体（包括月球和其他行星）上发射。

注意，1.414不是2的平方根，因为1.414的平方是1.999396。接近，但不是。事实上，因为1.414以4结尾，它的平方必将以6结尾。这本身就告诉我们，1.414的平方不能是2。根据同样的道理，任何有尽小数都不能是2的平方根。没有这样的可能：它的平方在小数点后面只有0，而小数点左边为2。

好啦，如果$\sqrt{2}$不是一个只有有限位的小数，那它会是何种可恶的东西呢？它可能是一个分数，即一个形如m/n的数，其中m和n都是自然数？我们称这样一个数为有理数，或更习惯地称为分数。（更一般地，任何数若能写成m/n的形式，其中m是一个整数，n是一个自然数，则被称为有理数。）

我们在问，是否有两个自然数m和n使得$\sqrt{2}=m/n$。如果有这样两个数，我们可以消去任何公因子。因此，如果2的平方根是一个分数，那就一定有两个无大于1的公因子的自然数m和n，使得$\sqrt{2}=m/n$。

注意，关于$\sqrt{2}$的基本事实是，它的平方是2。实际上，我们对它的了解仅止于此。因此我们有

$$\left[\frac{m}{n}\right]^2=2。$$

从而

$$\frac{m^2}{n^2}=2。$$

为了简化我们的工作，我们要除掉分母。为此，我们以 n^2 乘上式的两边，得到

$$m^2=2n^2。$$

我们不再需要考虑平方根和商。我们已经运动到了比较简单的自然数及其乘积的世界。我们现在已不是问“2 的平方根是一个分数吗?”而是要问“一个自然数的平方的两倍能否还是一个自然数的平方?”虽然听起来这完全不像我们原先提出的问题，但它是同一回事。

就是为了获得对新问题的感觉，让我们作些实验。1^2 的两倍是一个平方数吗？不是，它是 2。2^2 的两倍是一个平方数吗？不是，它是 8。这正好错过作为一个平方数的机会，因为 9 是一个平方数。错过得不多，但在我们的问题里，一吋和一哩是一样的。你可能想再试几个例子。例如，5^2 的两倍是 50，它和平方数 49 差 1。但是，正如我们在第十五章见到的那样，一百万次实验也不解决问题，除非我们碰巧找到一个平方数，它的双倍也是平方数。幸好，古希腊的数学家们证明了，毫无疑问，没有人能找到这样一个平方数。他们的推理涉及奇数和偶数的概念。让我们来看，他们是怎么做的。

一个奇自然数以 1，3，5，7 或 9 结尾。因此，你可以验证，它的平方以 1，5 或 9 结尾。所以，奇自然数的平方是奇数。换句话说，如果一个自然数的平方是偶数，则该数本身一定是偶数。这就是我们所需要的全部。(如果有人跟你说，“我

正想到一个自然数，它的平方是偶数"，那你可以说，"你所想的数一定是偶数。")

现在假设 m 和 n 是自然数，且 $m^2 = 2n^2$。正如我们已经提到的那样，我们可以认为 m 和 n 没有大于 1 的公因子。

因为 $2n^2$ 有一个因子 2，所以它是偶数。(实际上，偶数的定义就是它有一个因子 2。)这就告诉我们，m^2 也是偶数。于是，正如我们刚才指出的那样，m 是偶数。这就意味着有一个自然数 q，使得 $m = 2q$。

等式 $m^2 = 2n^2$ 成为

$$(2q)^2 = 2n^2,$$

它给予我们

$$4q^2 = 2n^2。$$

从这个等式的两边消去 2，产生等式

$$2q^2 = n^2。$$

这个等式告诉我们，n^2 是偶数。所以，n 是偶数。

现在我们得到，m 和 n 都是偶数。这就意味着它们以 2 作为公因子。这与我们所知道的它们的最大公因子就是 1 相矛盾。这个矛盾一定是在我们的讨论中某一错误假设引起的。但是，我们所作的惟一假设，就是$\sqrt{2}$为有理数。我们不得不作出结论，$\sqrt{2}$不能写成分子分母都是自然数的分数。简单地说，它不是有理数。

$\sqrt{2}$不是有理数并未使发射火箭复杂化。物理学家和天文学家们可以用小数表示逼近它，其逼近程度唯他们所愿。例如，为了实用的目的，1.414214 就足够好了。这个数是分数 1 414 214/1 000 000的变形。

不是有理数的数被称为无理数。有理数和无理数都被称为实数。

一旦我们拥有一个无理数，例如$\sqrt{2}$，我们就可以造出无限多个无理数。比方说，

$$\frac{7}{3}\sqrt{2}$$

也是一个无理数。因为，如果它是有理数，那就有自然数 m 和 n，使得

$$\frac{7}{3}\sqrt{2}=\frac{m}{n}。$$

以 3/7 乘此等式的两边，我们得到

$$\sqrt{2}=\frac{3m}{7n}。$$

因为 3m 和 7n 都是自然数，我们竟然得到，2 的平方根是有理数。所以，我们的假设（7/3）$\sqrt{2}$是有理数，一定是错误的。因此，它是无理数。

同样的论证表明，对任何异于 0 的有理数 r，r$\sqrt{2}$是无理数。注意，任何两个有理数，无论它们彼此多么接近，在它们之间，总有无穷多个有理数。（暂停，并弄清楚为什么会是这样。）当我们选取有理数 r，使它们按我们的要求彼此充分接近时，数 r$\sqrt{2}$也会按我们的要求充分接近。所以，在任何两数之间，总有无穷多个无理数。这两类数在数直线上到处掺和，以密切而复杂的缠结方式共存。

虽然无理数如此丰富，但我们在日常生活中从未见到它们。价格永远是有理数；例如，＄9.37 是 937/100。一位木工

测量一个锯条的宽度，满足于一个类似 $2\frac{31}{64}$的数；$2\frac{31}{64}$也是一个有理数，即 159/64。击球手平均得分数肯定也是有理数，因为它是击中数除以击球数。

直到大约公元前 500 年为止，数学家们都以为，所有数都是有理数。希腊人关于存在无理数的发现，大大影响了他们的推理。例如，当阿基米德（公元前 287—212）发明他的杠杆原理时，他不得不根据两平衡重量之比是有理数还是无理数，把他的论证分成两种情形。

希腊人考虑有理数和无理数，跟我们完全不同。对他们来说，算术就是几何，而且他们把一个数看成一个线段的长度。他们的基本概念是，"一个线段可以量度另一个线段"。

所谓线段 AB 可以量度另一线段 CD，就是我们能够沿着 CD 放置一定数量的 AB 复制品，使与 CD 正好相当。图 1 展示 AB 可以量度 CD 的情形，其中 3 个 AB 复制品与 CD 相当。

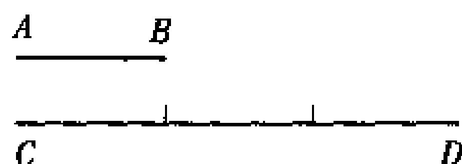


图 1

存在我们想要多短就能多短的线段，可以量度 CD。例如，长为 CD 的一百万分之一的线段，也可量度 CD，因为沿着 CD 可以放置它的一百万个复制品。

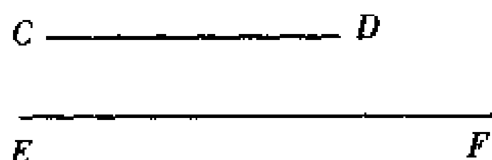


图 2

现在考虑两个线段，如图 2 的 CD 和 EF。

是否必有一线段 AB，哪怕很短，可以同时量度线段 CD

和EF呢？直到公元前500年，数学家们都以为总有这样一个公度。

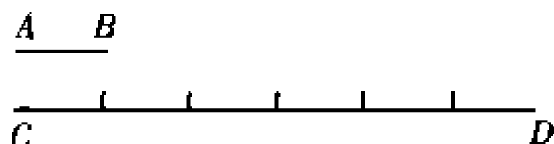


图3

让我们把这些几何观点转译为数的算术。

何时一长为 r 的线段 AB 可以量度一长为 a 的线段 CD 呢？回答：存在一个自然数 m 使得 $mr = a$ 之时。这时，AB 的 m 个复制品沿 CD 放置正好合适，如图3，其中 m 为6。

在这个情况下，AB 的长度是 $a/6$。可以量度 CD 的线段长度有 $a/1$，$a/2$，$a/3$，$a/4$，…，你想要多小就能多小。

现在设想有两个线段，一个长度为 a，另一个长度为 b。对于什么样的数 a 和 b，两个线段会有一个公度？如果这个公度的长是 r，那就一定有自然数 m 和 n，使得

$$a = mr,$$
$$b = nr。$$

这就告诉我们

$$\frac{a}{b} = \frac{mr}{nr},$$

从而

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}。$$

即使 a 和 b 可能是两个不怎么好的数，或许是无理数，但它们之商一定可以表示为 m/n 的形式，其中 m 和 n 都是自然数。换句话说，如果长为 a 和 b 的线段有一个公度，a/b 一定是有理数。

例如，如果 $a = 10\sqrt{2}$，$b = 23\sqrt{2}$，那它们就有一个公度，即$\sqrt{2}$。而且，a/b 的确是有理数，也就是 $10/23$。

让我们把这应用于图 4 中直角三角形的斜边和一个直角边。

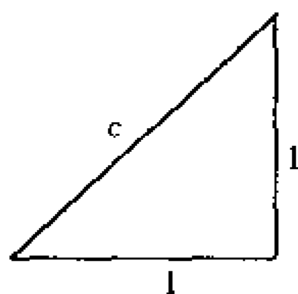


图 4

按毕达哥拉斯定理（见第二十二章），$c^2 = 1^2 + 1^2$。所以，$c = \sqrt{2}$，而且斜边与一个直角边之比为$\sqrt{2}/1 = \sqrt{2}$，不是有理数。所以，对于这两个长度，没有公度。

如果两个线段的长度之比为有理数，那又怎么样呢？是否意味着它们有公度呢？让我们看看。

称这两个长度为 a 和 b。假设 a/b 是有理数，即有自然数 m 和 n，使得

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}。$$

以 bn 乘这个等式的两边，以清除分母，我们得到

$$an = bm。$$

然后除以 mn 得

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}。$$

这个等式告诉我们什么呢？它说，“如果你把一个长度为 a 的线段分割成相等的 m 小段，而把一个长度为 b 的线段分割成相等的 n 小段，那么，所有这些小段有相同的长度。”称此公共长度为 r。一个长为 r 的线段可以同时量度那两个线段，所以，长度为 a 和 b 的线段有公度。

这一迂回的要点是，希腊人的概念“有公度”和我们的概念“长度之比是有理数”，是一样的。

没有公度的线段常在几何中出现。下面是几何学家 G. D. 查克里安让我注意的另外一个例子。首先，画一个正方形，如图 5。

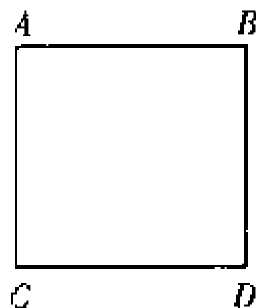


图 5

现在，在它的右边粘上一个小矩形，但不能是任意矩形。沿着 BD 边从一个很窄的矩形开始，逐渐增加宽度，直到你得到这样一个矩形 AEFC，以至于你加上去的小矩形 BEFD 与大矩形 AEFC 有相同的形状，如图 6。

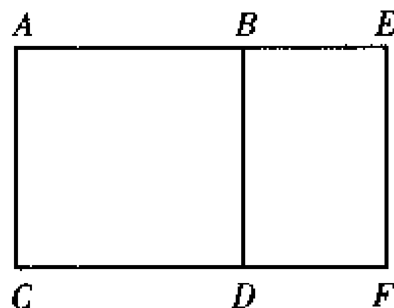


图 6

矩形 BEFD 与矩形 AEFC 有相同的比例，但它被旋转了 90°。它不过是大矩形 AEFC 按比例缩小的形式。

让我们完全不用算术，只用图形，来说明长度 AC 和 AE 没有公度。

首先假设 AC 和 AE 有一公度 r。因为 AC = AB，r 也可量度 AB。图 7 展示这一情况。

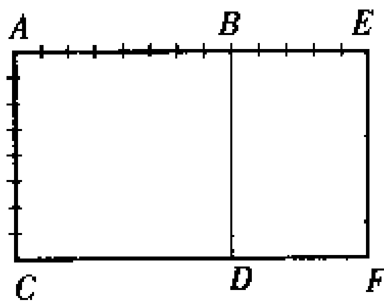


图 7

所以，r 同样可以量度 BE。它也可以量度 EF，因为 AC 和 EF 有相同的长度。于是，r 可以量度小矩形 BEFD 的两个边。但 BEFD 与大矩形 AEFC 有相同的形状。所以，往下我们可以针对 BEFD 继续进行。

在矩形 BEFD 中作正方形 BEGH。BEFD 内剩下的是一个与 BEFD 相似的矩形 HGFD，如图 8 所示。这个矩形是我们由之出发的矩形 AEFC 的缩影。

因为 BE 等于 EG，r 也可量度 EG，从而量度 FG。注意 r 也可量度 DF。所以，r 可以量度小矩形 HGFD 的两边。这一推理过程可以不断进行下去，产生出越来越小而其两边可以用 r 量度的矩形。但这是荒谬的：最终这些矩形会变得如此地小，以致它们的边长小于 r。因此，r 不可能量度它们。这就表明，原来矩形的两边没有公度。所以，不论那两个边是什么样，它们的比是一个无理数。（你可利用代数证明长宽比是 $(1+\sqrt{5})/2$，即我们在第六章中结识的老朋友——黄金比，它常常会突然出现在许多数学分支中。）

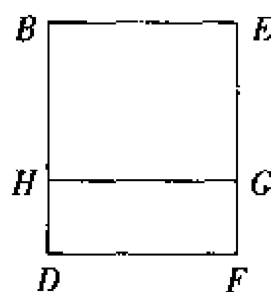


图 8

1761 年，J. H. 兰伯特（1728—1777）证明了，π 是无理数。这就包含，一个圆的直径与周长没有公度。换句话说，你永远找不到一个其直径和周长以吋计都是自然数的圆。

研究下述概念是一个愉快的练习，这个概念听起来似与有公度正相反。称两个长度 a 和 b 为可比较的，如果有某长度 c，使得 a 可量度 c，b 也可量度 c。假如两个长度有公度，它们一定可比较吗？假如它们是可比较的，它们一定有公度吗？

本章我们探索了有理数和无理数之间的不同之处。第二十六章研究这样一个问题，“无理数正好和有理数一样多吗？”乍一看来，这个问题似乎有些奇怪，因为每一种数都有无穷多个。但是，那令人惊奇的答案，虽然基于一个如此简单的概念，以致我们经常在幼儿园和一年级见到它，却有深刻的涵义。

第二十二章　直角三角形的三个边

一块用胶合板和钉子做成的测地板，是探测边界由直线段组成的图形面积的方便工具。为了做一块测地板，我们从厚度为 1/2 吋的胶合板上割下一个边长为 14 吋的正方形。然后在此板上画出间隔为 1 吋的圆点，沿边缘保留 1/2 吋的空白区。最后，在每一点敲进一枚 2 吋的精制钉子。做成的测地板应当和图 1 相似，该图展示的两个板，一为透视图，一为俯视图。

敲进 196 枚钉子可能不很有趣，但它却使一块测地板大得足以进行十分广泛的实验。因为边界是钉距的一半，你可以把几个测地板放在一起，得到一个更大的测地板。于是，通过拉直钉子之间的橡皮筋，你就可以构成各种形状和大小的多边形。

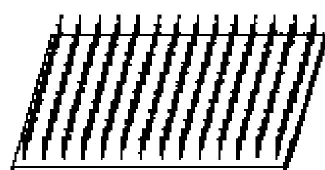
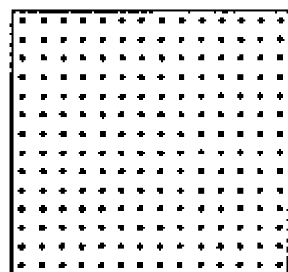



图 1

作为测地板的一个替代，你可以在纸上画出有固定间隔的圆点，然后在它们之间作直线，以形成多边形。但是，在每次实验之后，你必须或者擦掉这些直线，或者拿一张新纸从头开始。

现在设想你在测地板上构成一个无凹陷的多边形，如图

2。

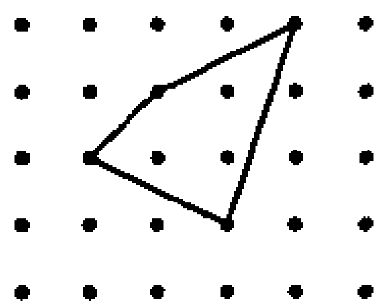


图 2

为求这样一个多边形的面积，先作一个围绕它的矩形框架。然后把这个多边形和这个框架之间的面积，分成一些顶点在钉子处的矩形和直角三角形，如图 3。

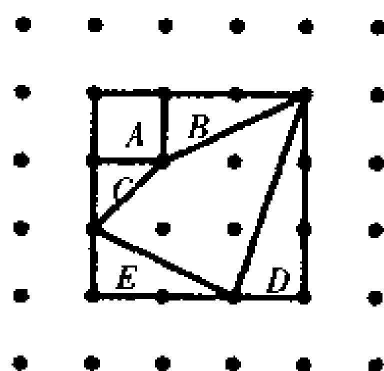


图 3

因为一个矩形的面积就是它的宽与长的乘积，而一个直角三角形的面积是底乘高的一半，所以，这个多边形之外的面积易于求出。然后从你所作的框架的面积减去这个面积，便得到这个多边形的面积。计算如下：

A 的面积 $=1\times1=1$。

B 的面积 $=(1/2)\times1\times2=1$。

C 的面积 $=(1/2)\times1\times1=1/2$。

D 的面积 $=(1/2)\times1\times3=3/2$。

E 的面积 $=(1/2)\times1\times2=1$。

框架的面积 $=3\times3=9$。

于是，这多边形的面积为

$$9-[1+1+1/2+3/2+1]=9-5=4\text{ 平方吋。}$$

应该承认，这是一个求面积的间接方法。自然得多的方法是，保持在多边形之内，把它分割成一些所有顶点都在钉子处的矩形和直角三角形。欢迎你来试试。我作不了。

在计算了各种各样的多边形面积之后，你就可以进行导致著名的毕达哥拉斯定理的实验了，这个定理把一个直角三角形

的三个边长联系在一起。

首先，拉直一条或几条橡皮筋，以形成一个直角边长为 1 和 2 的直角三角形。然后，使用多条橡皮筋，在这个三角形的第三边的基础上，形成一个正方形。这个最长的第三边叫做斜边（hypotenuse），来自希腊文 hupo（在下）和 tenien（拉直）。几何形状如图 4 所示。

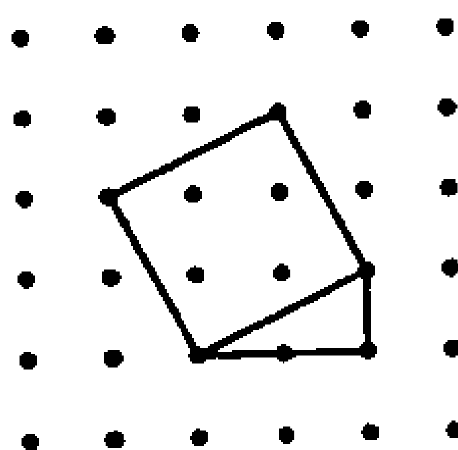


图 4

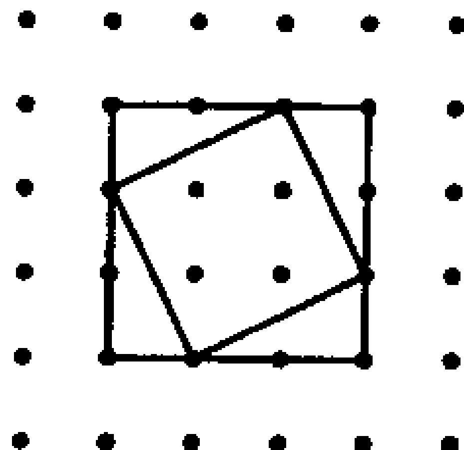


图 5

如果你实验过，你就会发现，你总可以找到两个钉子完成这个正方形。然后，如图 5 所示，借助一个框架，求出这个正方形的面积。

因为这个框架的面积为 9，而我们要减去的四个三角形，每个面积都是 1，所以在这个斜边上的正方形的面积为 9 - 4 = 5 平方吋。（顺便说一句，你也可以保持在这个正方形之内求出这个面积。）

这一计算也可对测地板上形成的其他直角三角形来作。利用充分小的三角形，使得它们和在它们的斜边上建立起来的正方形都在一块测地板内，我们可能会收集到下列数据：

三角形的第一个直角边	1	1	1	1	2	2	2	3
三角形的第二个直角边	1	2	3	4	3	4	5	4
斜边上正方形的面积	2	5	10	17	13	20	29	25

（第二列记录着我们所作的实例。）你看到描述正方形的面积通过两边的长度表示的规律吗？如果没有，你可以对更多的三角形作实验。（别看下一段。假如这是一本教科书的话，我就不会把它写进去。）

这规律原来是，“斜边上形成的正方形的面积等于二数之和，这二数是，一个直角边的自乘积和另一直角边的自乘积。”这就是毕达哥拉斯定理。我以实验暗示的形式提出这个定理，部分用几何语言正方形，部分用算术语言积与和，进行叙述。

为了完全用几何语言叙述毕达哥拉斯定理，我们画出两个直角边上形成的正方形，如图6。

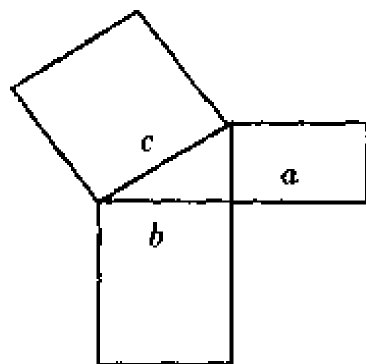


图 6

现在，它的内容是，“斜边上正方形的面积，是两直角边上正方形的面积之和。”用图6所示的长度 a，b，c 表示，它就是

$$c^2 = a^2 + b^2。$$

人们通常记得的毕达哥拉斯定理，正是这种形式。

借助于测地板所作的这些实验，证明毕达哥拉斯定理对所有直角三角形都成立吗？完全不是。不过，确有简单的论证表明它为什么总是对的。最简单的一个论证，不需要任何语言。

它是中国数学家在一千多年前发现的，并验证了俗话所说一个图形顶一千句话。在这个实例里，图形展示以两种方式分割一个正方形，如图7。（八个三角形恒等。）

看它一会儿。让我跟你说。只需要你几分钟的时间。毋须作任何记录和任何计算，只是比较面积，你就会明白，为什么左边这个斜放的正方形的面积会等于右边两个小正方形的总面积。这就证明了毕达哥拉斯定理。

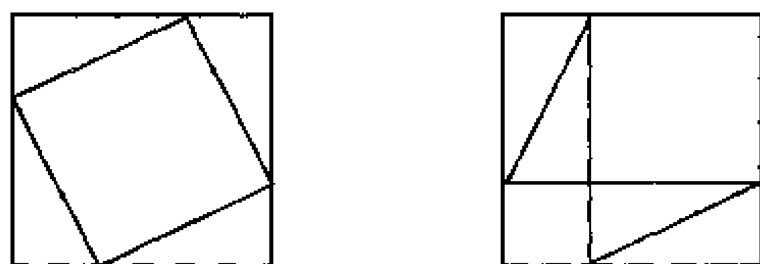


图 7

作为这个定理的举例，我们来求两直角边都是1的直角三角形的斜边。称该斜边的长度为c，我们有

$$1^2+1^2=c^2。$$

由此可见，$c^2=2$，因此c是2的平方根，约为1.414。

像大部分数学史一样，毕达哥拉斯定理的历史是一片模糊。先于毕达哥拉斯一千多年的巴比伦数学家们早已熟悉这个定理。他们可能有过证明，也可能只是从实验中引出。例如，一块粘土板展示出一个两直角边都是30，斜边为

$$42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$$

的直角三角形。（他们使用60进制，而不是10进制。）假如你停下来把它换成十进制，并拿它和毕达哥拉斯定理对于斜边给出的结果进行比较，你就会发现，这两个数实际是相同的。另

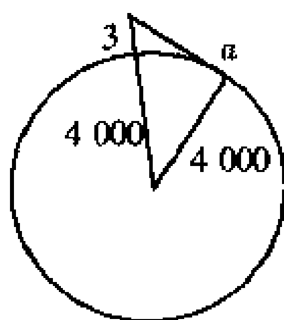
一块板上列举了各种各样的直角三角形的三边，其中包括例如两直角边为2 400和1 679，斜边为2 929的情形。

根据传说，活动于公元前450年左右的毕达哥拉斯给出了该定理的第一个证明。我们确实知道，该定理及其证明出现在写于公元前300年左右的欧几里德课本中。E.J. 斯维茨和T.I. 高在他们的《毕达哥拉斯是中国人吗?》一书中凭着某些证据提出，第一个证明可能是先于毕达哥拉斯一千多年的一位中国数学家的工作。

每天，成千上万的工程师、科学家、数学家、木工和学微积分的学生，应用毕达哥拉斯定理。在第三十一章中，我们借助于它获得一个利用所有奇自然数的倒数求π的方法。

但是,作为一个更实际的应用,我现在用它来回答这样一个问题:"当你站在沙斯塔山顶时,你能看到地球表面上多远?"

把地球半径看作4 000哩，沙斯塔山高看作3哩，我作一个简图标明这些信息(没按比例)，如图8。



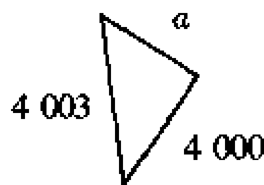


图 8

用a表示的待求距离,是一个直角三角形的一个直角边的长度,该三角形的斜边为4 003,而另一直角边为4 000。(长度为a的直线是圆的一条切线,垂直于所画出的半径。)所以,根据毕达哥拉斯定理,

$$a^2 + 4\,000^2 = 4\,003^2。$$

从而

$$a^2 + 16\,000\,000 = 16\,024\,009。$$

由此推出

$$a^2 = 24\,009,$$

从而

$$a = \sqrt{24\,009} \approx 155 \text{ 哩}。$$

简单地说,你可看到大约155哩。你可用同样的方法求出,当你站在一个100呎高的悬崖上眺望海洋时所能看到的水平距离。

让我以两个类似的问题来结束毕达哥拉斯定理的讨论。首先,如果你的眼睛是在地面上方5呎,我们仍把地球看作一个光滑的球体,你能在地面上看到多远?其次,换一种情况,如果你能爬上一个梯子,使你的眼睛处于地面上方10呎,你是否会看到两倍那么远?跟前面一样,毕达哥拉斯定理会帮助你回答这两个问题。

第二十三章　π是一块蛋糕——是不是?

"什么也不要告诉学生。让他们通过自己的发现学习知识。"这是流行的教学法名言,而且是很吸引人的。但是,给予孩子们一个机会,以进行实验并自行发现一般原理的教师或家长,最好对意外有所准备。我将描述我想通过"发现"教一点几何的尝试来解释这个警告。

环绕任一圆的距离是横穿该圆的距离之三倍多一点。用专

门术语来说就是，“圆周与直径之比为三多一点。”这个比用 π 表示，可以用小数 3.14 或分数 22/7 作很好的近似值。

在学校里应当怎样教这个概念呢？雪莉·弗赖伊在 1989 年她任全国数学教师委员会主席时建议，应当利用罐盖引进 π。学生们会要测量盖子的直径和周长，求商，并把数据记录在黑板上，分三列，标以“直径”、“周长”和“比”。然后她断定，“在这个班汇总所有测量结果之后，他们将会发现，第三列中的数约为 3.14。对所有不同大小的盖子，这个数永远是一样的。”

这个方法听起来是合理的，甚至是无法规避的。其实，几年以前我用过它，我将说明发生了什么情况。

当我的一个孩子在六年级时，我应邀访问这个班级并讲讲数学。我决定讨论数 π。这个选题似乎甚为理想：它给予学生们一个进行实验和分析数据的机会。此外，它易于适应可资利用的时间。

当然，我可以抛开这些实验，径直告诉他们，这个比值对所有的圆都是相同的，作为一个小数，它大约是 3.14。但是，如果我这么做，学生会很快忘掉我告诉他们的一切。

在我即将到班上的前一天，他们的老师要求他们第二天携带圆形物体来到课堂。当我到达时，我看到许许多多的圆，小到罐盖，大到自行车轮。我以要求他们测量横穿这圆的距离开始，他们用一条直尺就可以作。求环绕这圆的距离就没那么容易。他们可以用一条细绳环绕这圆然后测量细绳，或者使用测量卷尺。

然后，我站在黑板旁边担当秘书，全班学生共享他们的数据，综合起来大致如下：

物　　体	直　径（吋）	周　长（吋）	比
浅　　碟	6.2	19.8	3.2
垃圾桶盖	20.5	63.5	3.1
废纸篓	9.3	29	3.1
自行车轮	28	88.8	3.2
罐　　盖	2.4	7.2	3.0

（把常用的1吋的分数化成小数费了很大气力。我没有用米制测量长度太失算了。）

"你们注意到什么？"我问。

"圆越大，周长越大。"

"还有别的吗？"

"比值从3到3.2。"

"你们认为会是什么情况？"

没人提出意见。

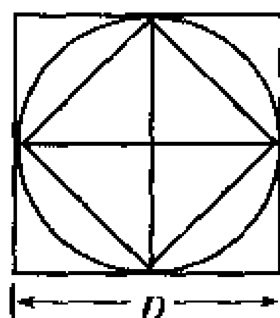
这是我始料未及的。我曾经希望他们会说，如果没有实验误差，所有这些比值都会相等。他们没有这么说，那么我将怎样做呢？我的这堂课糟糕透了。我很幸运，铃响了，下课了。如果我要回去补上一堂课，我肯定会让他们更精确地进行测量。

你可能感到疑惑，"如果这些学生在更精确地进行测量之后，仍然提不出周长与直径之比对所有圆都相同，又怎么办呢？"在那样的情况下，他们就会有足够的实际体验准备接收我的启示。于是，我会告诉他们，如果他们能够测量得很理想，那么不论圆的大小如何，他们全都会得到同一个数，而且这数是一个无尽小数，前几位是3.14159。

当我偶然见到弗赖伊关于使用罐盖的建议时，我感到惊异。罐盖如此之小，只能给出很不精确的估计。或者她向她的学生提供了特殊的测量工具，例如千分尺，或者她根本没有在一个由真实的学生组成的真实班级试教过这堂课。

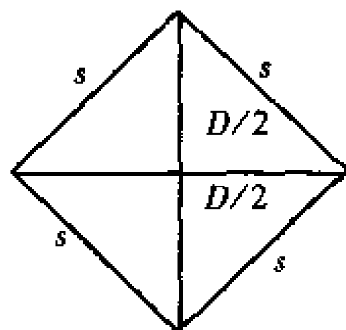
但是，说真的，很难比学生们测量得更精确。即使使用大圆和精确的测量工具，也难以得到 π 的三或四个小数位。那么，我们怎样才能找出 π 的十个或更多小数位呢？显然，必须有一种方法，其精确度不受我们环绕罐盖、壶、盘和自行车轮测量距离的能力极限的限制。

即使没有任何实验，我们也能对周长与直径之比说点什么。下图展示一个直径为 D 的圆，环绕它的一个边长为 D 的正方形，和一个位于其内的斜置小正方形。



因为大正方形的周长是 4D，所以圆的周长小于 4D。这就表明 π 小于 4。（这里我们使用了如下事实：一条既无隆起又无凹陷的曲线，位于另一曲线之内，它一定短于这另一曲线。如果里面的那条曲线有扭摆，这就不一定对了。）

其次，我们计算这个斜置正方形的周长，以找出一个小于 π 的数。称这个正方形的边长为 s，如下所示。



注意，s 是一个直角三角形的斜边，该三角形的两直角边的长度都是 D/2。由毕达哥拉斯定理，

$$s^2 = \left[\frac{D}{2}\right]^2 + \left[\frac{D}{2}\right]^2。$$

所以

$$s^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{D^2}{4} = \frac{D^2}{2}。$$

可见，s是$D^2/2$的开方根，而这就告诉我们，

$$s = \frac{D}{\sqrt{2}}。$$

因此，小正方形的周长4s是$4D/\sqrt{2} \approx 4D/1.414 \approx 2.828D$。从而，π大于2.828。

我们现在知道，π是介于2.828和4之间。如果你改用六边形，你会发现，内六边形的周长为3D，而外六边形的周长为$2\sqrt{3}D \approx 3.464D$。所以，π在3与3.464之间。

但是，我们怎样才能更精确地求π呢?

阿基米德不是用两个正方形,而是用两个96边正多边形，一在圆内,一在圆外。在一阵冗长的计算之后,他指出π是介于

$$\frac{25344}{8069}和\frac{29376}{9347}$$

之间。(取到四个小数位，就是3.1409和3.1428。)他没有报道如此可怕的分数，而是说π介于

$$3\frac{10}{71}和3\frac{1}{7}$$

之间。这就精确到足以表明π不是一个常见分数。

正如J.H.兰伯特1761年所证明的那样，原来π不是一个分数，无论是常见或不常见分数。你可能在想，“好哇，它不是分数，不是有理数，至少我得知道它的十进制表示是什么样

子。它是什么呢?"

我们来考察，这个问题牵涉到些什么。十进制是基于 10 的幂。为什么是 10? 可能是因为我们使用我们的十个手指计数。当我们写出比如说 247 时，我们是在用速记法写

$$(2\times 10^2)+(4\times 10)+7。$$

类似地，3.14 是

$$3+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}$$

的速记。因此，这个问题相当于"一个圆和我们双手的十指是什么关系?"当问题以这种方式提出时，如果真有什么适当的关系，即关于 π 的小数形式中数字有一个美妙的公式，我们定会感到惊奇。

π 的小数开头是 3.14159265358979……。为了记住它的六个小数位，可用这一语句："How I wish I could recollect pi"（要是我能记住 π 该多好），其中每个词的字母数等于一个数字。如果你需要十个小数位，那就记住"How I wish I could recollect pi easily using one trick"（要是我能用一个诀窍很容易地记住 π 该多好）。

1989 年，哥伦比亚大学的格雷戈里和戴维·屈德诺夫斯基得到了 π 的十亿多个小数位。关于这种表面上异乎寻常的行为存在两条理由：一条是实用的，一条是理论的。

首先，庞大的计算可以测试计算机的能力和揭露其设计中的"缺陷"。其次，所得资料可以诠释一个老问题，"π 的数字是随机的吗?"随机的意思是，从长远来看，十个数字趋向于同等经常地出现，每一个的出现次数约为 10%。一百个两位

数也趋向于同等经常地出现，每一个的出现次数约为 1%；对于三位数、四位数等等，也是如此。前十亿个数字的确提示，这些数字是随机的。但是，这些资料并未确凿无疑地证明，这些数字真是随机的。（回忆第十五章的教训，那里曾给出从令人信服的数据得出错误结论的例子。）

怎么可能计算 π 到这么多小数位呢？肯定不是通过测量越来越大的圆。取而代之，数学家们发明了计算 π 的公式。这样的公式之一是

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\cdots\right],$$

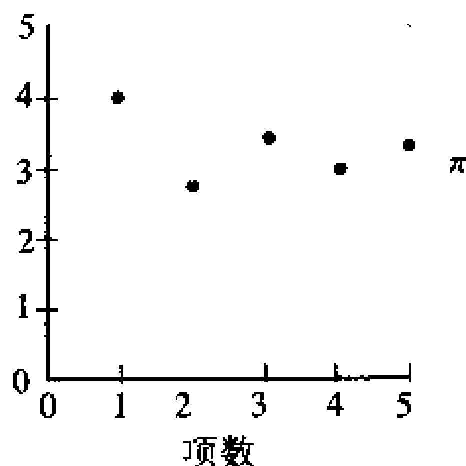
它把圆和所有奇数联系起来。（第三十一章说明这个等式为什么成立。）在这个和中你用的项数越多，你就能指望得到越接近于 π 的结果。如果你只用三项，其估计值（到三位小数）就是

$$4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right] \approx 3.467。$$

用四项你就得到

$$4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right] \approx 2.895。$$

为对这些估计获得更好的感觉，你可以再计算几个。你会注意到，它们上下跳动，时而高于，时而低于 π，如图所示。



但是，即使你算到 100 项，你的估计不会产生三个小数位的精确度。

屈德诺夫斯基兄弟使用了一个复杂得多但效率很高的公式，它与印度数学家斯里尼瓦沙·拉玛努扬（1887–1920）本世纪初的工作有关。他们只用它的100项，已经能够获得π的前1 400个数字。

顺便说一下，第十五章中的游戏之一可以用来估计π值，但是效率不是很高。回忆该处S数的定义：一个S数就是这样一个自然数，其素数因子分解式不包含多于一次的素数因子。对任一自然数n，设n^*（读作"n–星"）表示不大于n的S数的个数。例如，你可以验证，当n为100时，n^*为61。数论学家已经证明，当你选取的n越来越大时，不大于n的S数所占分额n^*/n将会越来越接近于

$$\frac{6}{\pi^2}。$$

作为举例，用$n=100$。这就给出估计

$$\frac{61}{100}\approx\frac{6}{\pi^2},$$

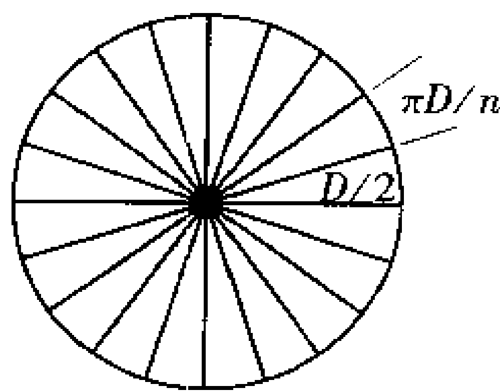
由此推出$\pi^2\approx600/61$。所以，π近似于10的平方根，约为3.136。

这似乎很奇怪，通过圆定义的一个数却和素数有关。更为奇怪的是，π在数学及其应用中到处出现。为再例举它的表现形式之一，统计学家在他们的正态分布公式中见到它；所谓正态分布，几何上就是一条钟形曲线，经常用于在一个大类中划分等级。假如你想知道，告诉你这曲线是由表达式

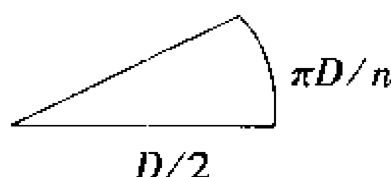
$$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

描述的。这里，e 表示每一位微积分学生钟爱的数，一个无理数，其十进表达式开头是 2.718。

让我们回到 π 在几何中的应用。一旦我们知道一个圆的周长总是它的直径的 π 倍，以及 π 约为 3.14，我们就能求一个圆盘的面积。例如，让我们应用一种可以溯源到古希腊的思想，来求一个直径为 D 的圆盘面积。把这圆盘分割成 n 块相等的馅饼。下图展示 n = 20 的情形。



每一块看来好像一个窄小的三角形。它有两个边是直的，而很短的一边则是曲的。但是，当 n 大时，这些饼块变得很细，而曲边则几乎变为直边，正如这个图形所提示的那样：



每一块像一个高为 D/2，底为 πD/n 的三角形。所以每一块的面积近似于

$$\frac{1}{2}\times\frac{\pi D}{n}\times\frac{D}{2}=\frac{\pi D^2}{4n}。$$

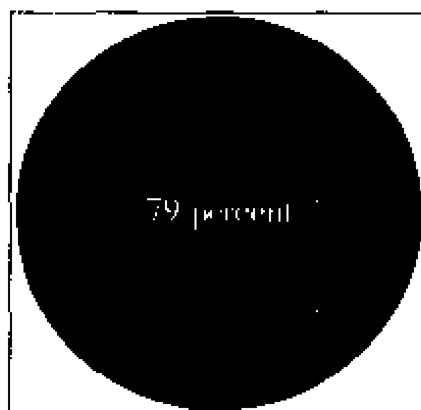
因为总共有 n 块，故它们的总面积约为

$$n\times\frac{\pi D^2}{4n}=\frac{\pi D^2}{4}。$$

所以，当你选取 n 越来越大时，圆盘面积的这些估计就越来越接近 $\pi D^2/4$。于是，一个直径为 D 的圆盘面积必为

$$\frac{\pi D^2}{4}\approx\frac{3.14D^2}{4}\approx 0.79D^2。$$

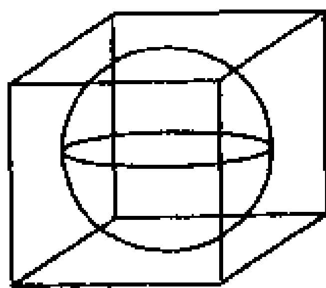
这就是说，一个圆盘大约占有包围它的最小正方形的 79%。（当你从一架喷气式客机往下看时，你会看到，中西部农场的灌溉面积使用大约 79%的土地，如下图所示。）



第一位求出一个球的体积和表面积的人是阿基米德，他是如此地看重这个工作，以致他要求在他的墓碑上展示一个球内切于一个圆柱体。他证明了，一个直径为 D 的球的体积是

$$\frac{\pi D^3}{6}。$$

因为 π/6 约为 0.52，这球占有包围它的立方体体积的一半多一点，如下图所示。（它恰好占有外切圆柱体体积的三分之二。）



阴影

阿基米德也求出了一个球的表面积。看看图形可知，上半球面的面积大于它的圆形阴影的面积。下半球面的面积也是这样。所以，整个表面积大于阴影面积的两倍。阿基米德证明了，它恰好是阴影面积的四倍。这个关系提供了一个记住表面积公式的简易方法：它是 4 乘 $\pi D^2/4$，也就是 πD^2。

在阿基米德之后大约 2000 年，A.L. 柯西（1789—1857）推广了这一发现。他证明了，任何没有凹陷或隆起的立体——例如一个鸡蛋或一个盒子——的表面积，恰好是它在所有可能方向作成的阴影之平均值的四倍。这一事实已被用于建造自动化电子柠檬分类装置。

科学家们在试图与外层空间有智能的生命进行联系的过程

中，已把π的十进制数字，作为有智能或无智能的生命至少在一个行星上繁衍的信号，发射出去。毫无疑问，任何先进的文明社会都会遇到这个数，即使它的环境是如此地易变，以致居民们从没看到过圆，也从没想到过它的周长与直径之比。

π的许多应用不应使人感到意外。毕竟，2这个数也有许多应用：它能告诉我们，一辆自行车有几个轮子，国会任期长度，或一个水分子中氢原子的数目。如果我们在几何学之前学习过统计学，我们定会感到惊奇，一个出现于正态分布中的数，竟与环绕一圆的距离有关。数π出现在数学之树的这么多分支中，只不过反映这一学科的根本统一性。

当我们想到π时，我们不要总想到圆。它与所有奇自然数有关。它也与所有不能被素数的平方整除的自然数有联系。而且它是统计学中一个重要公式的一部分。这些只是它不可思议地出现的许多地方中的几个。正是通过这样令人惊叹的联系，数学展现出它独一无二的迷人魅力。

我的妻子，诗人汉娜·斯坦因，在读过本章并同我讨论之后，写下了下面的一首诗。这首诗不仅描述了她对π扮演的诸多角色的惊叹，也包括了我的惊叹。

献给一位数学家的爱

以太，或者别的什么，高高在上——

玲珑剔透的无穷阶梯，任凭遐想——

亦真亦美，为你欢呼激昂——

我永远追你不上，

哪怕是第二层次，也不敢企望。
我习惯于认为
π只是一种方式，把圆测量。
现在你告诉我，
π在气态、液态的世界里，到处潜藏，
那里没有圆，即使投下一颗卵石，
也不能激起环状波浪。
那里也没有卵石，
——没有圆盘，没有球体，没有赤道的模样——
只有纯粹的构造，谁能想象！
你说得对，π在到处徜徉，
像一位没有理性的老大叔，周游全国，
玩着纸牌的戏法勾当。
然而，圆只是他的杰作之一：
π将它的拇指伸入奇数的染缸；
从它的藏身之所，在平方根中，平方根下，
像一辆满载异常土豆的货车，π发出吟唱：
与圆无关，除以一个素数的平方。
在出类拔萃的数学家天地之外
π把通路照亮，
它高视阔步地走过黑洞和红移，
它出没于电子之间，空穴之乡。
像生长着的晶体，
一点一点地进入宇宙的缝隙空档，
π期待着思维的降临，

期待着有一只笔突然去撞，
当他的奥秘，反射到
坚韧不拔的求索的心房。
我请问你：是π把整个宇宙紧扣在一起？
莫非他是上帝下降？

我第一次相信，
我能追随你，永远向上，向上——

第二十四章　变方程为图形

17世纪上半叶举行了一场真正重要的婚礼，远比皇朝的合并更为重要。正是在这一时期，代数与几何合而为一。两位法国数学家，雷勒·笛卡儿（1596—1690）和比尔·费马（1601—1665）主持了这一经久不衰的婚姻。笛卡儿指明了如何把几何转化为代数，而费马则指明了如何把代数转化为几何。今天，笛卡儿赢得了大部分的赞誉，由于他按自己的想法写了一本书。但是，在本章中，我们只聚焦于费马的观点，因为后面几章要用到它。

他的想法十分简单，和许多伟大的思想——例如大陆漂移，或染色体的螺旋线形式——当人们第一次想到它们时一样。

首先，在一张纸上画出两条互相垂直的直线。设想这两条直线是无穷的，虽然纸总有尽头。一条直线是水平的，即平行

于书页底端。另一条是垂直的，平行于书边。三个多世纪以来，水平线被称为 x 轴，垂直线被称为 y 轴。图 1 继续这一传统。

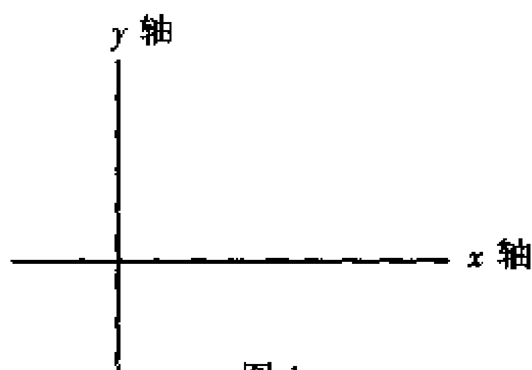


图 1

把这两个轴等同于数直线，如图 2。

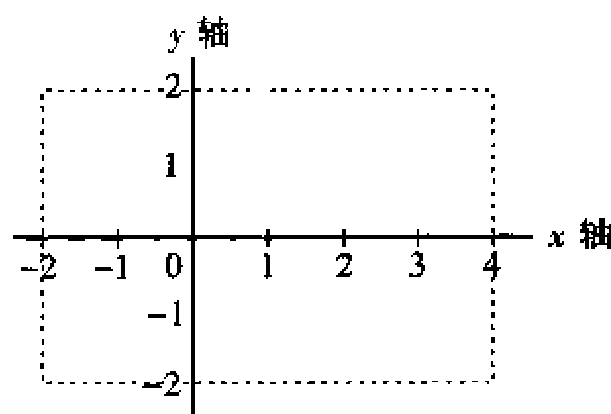


图 2

每个轴上的每一点对应一个数。平面上的任何一点 P 可以用一对数描写。为了得到这两个数，过 P 作一条平行 y 轴的直线和一条平行于 x 轴的直线，如图 3。

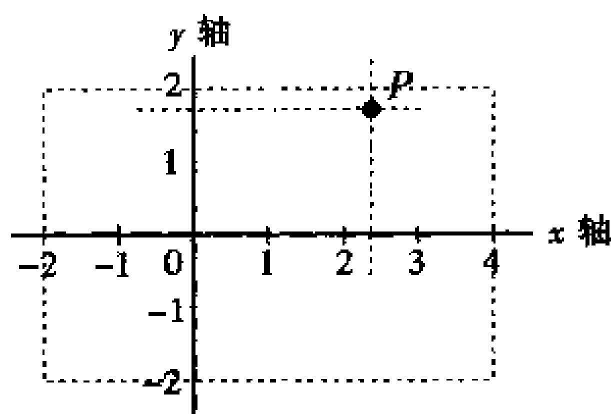


图 3

过 P 的垂直线与 x 轴交于一点，以某数 x 描写。（在图 3 中，x 约为 2.3）。这个数被称为 P 的 x 坐标。它告诉我们，点 P 离 y 轴有多远。对 y 轴右面的点 P，x 是正的；如果 P 在 y 轴左面，则 x 是负的。

过 P 的水平线与 y 轴交于一点，以某数 y 描写。（在图 3 中，y 约为 1.7。）这个数被称为 P 的 y 坐标。它告诉我们，P

离 x 轴有多远。对 x 轴上方的点，y 是正的；对下方的点，y 是负的。

而后，习惯上干脆称点 P 为“点（x，y）”，其中 x 和 y 称为它的坐标。例如，图 3 中的点 P 可能就是（2.3，1.7）。图 4 展示散布于所谓 xy 平面的另外几个点。

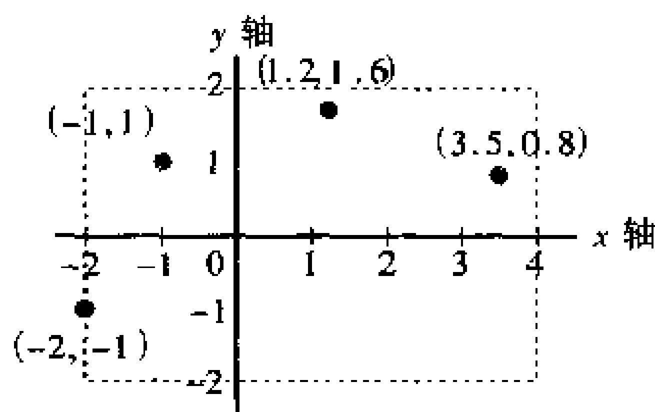


图 4

现在我们来谈把一个含字母 x 和 y 的方程转化为一个图形的费马方法。我将以后面几章将会出现的方程

$$y = x^2$$

为例加以说明。

大部分点的坐标都不满足这个方程。例如，点（2，11）就不满足。当你以 2 代替方程 $y = x^2$ 中的 x，而以 11 代替其中的 y 时，你会得到 $11 = 2^2$，或 $11 = 4$，而这是不对的。但是，点（5，25）的确满足这个方程，因为 25 的确等于 5^2。这个方程的图形，或图像，由所有其坐标满足这个方程的点构成。费马把这个方程转化为一个图形的方法，就是如此。

为了找出 $y = x^2$ 的图像上的点，取一个数为 x。于是，y 为该数的平方。例如，若你取 x 为 3，则 y 为 9。因此，点（3，9）在这个图像上。（-1，1）也在。图 5 显示出这样找出的七个点。

为节省篇幅，我让 x 保持在 -3 和 3 之间。我要是让 x 为 4，那么 y 就会是 16，而这个图像就要占半页。同样，为了方

便起见，我只选取整数为 x。但是，位于这些整数之间的所有数也都是可用的。例如，若 $x = 1/2$，则 $y = 1/4$；因此，点（1/2，1/4）也在方程 $y = x^2$ 的图像上。点（$\sqrt{2}$，$(\sqrt{2})^2$）=（$\sqrt{2}$，2）也在其上。

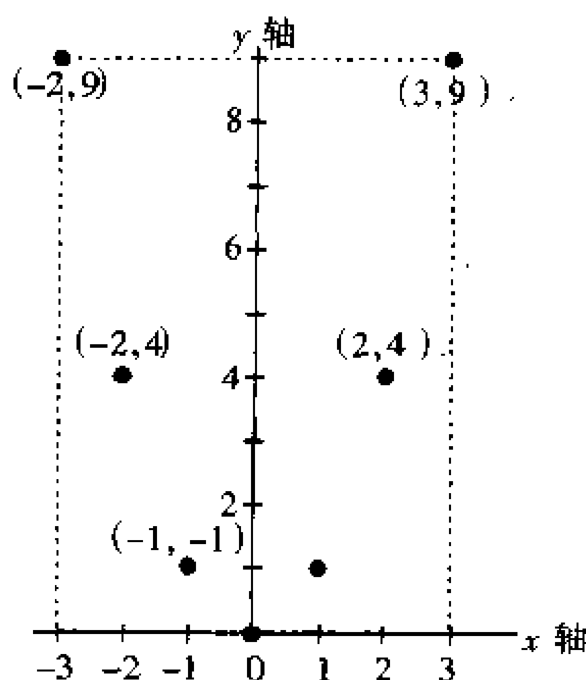


图 5

所有点（x，y）的总体，其中 y 为 x 的平方，构成一条光滑曲线，如图 6 所示。

这条曲线被称为抛物线，已被研究了2 000多年。希腊数学家们发现了这条曲线的一个值得注意的性质。为了描述这一性质，设想该曲线由一种类似镜子或亮金属的反射性物质做成。结果，所有来自该抛物线上方且平行于 y 轴的光线，经过曲线的反射后，通过 y 轴上同一点（0，1/4），在图 7 中以 F 表示。（借助于微积分容易证实此点。）

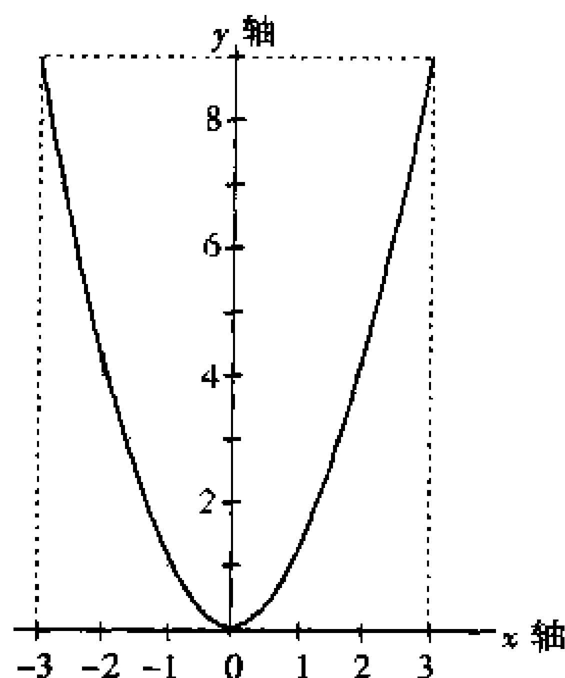


图 6

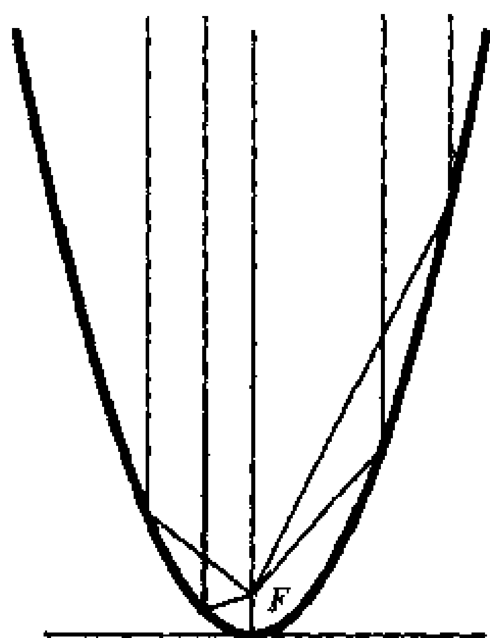


图 7

如果你将这抛物线围绕 y 轴旋转以形成一个发亮的碗，你就会得到一个太阳炉。因为所有入射光都通过点 F，它就是放汉堡包或其他食物的地方。

另一方面，设想在点 F 处放置一个灯泡。于是，由这个灯泡发出的所有光线，经过该抛物线的反射后，最终都平行于 y 轴。这就是为什么闪光信号灯或照明灯的反射镜形状都像抛物线的原因。伽利略（1564—1642）证明了，一个抛出去的球所走的路径是抛物线形。支持均匀水平载荷，例如在一个桥内的钢缆，是一条抛物线。（但是，一条两端悬挂的均匀绳索或缆索，例如晒衣绳，就不呈现抛物线形状。与之不同，像圣路易斯的大拱，采取悬链线形状。$y=2^x+2^{-x}$的图像是悬链线的一个例子。注意，这里底固定而指数变化。这与 $y=x^2$ 完全相反，后者是指数固定而底变化。）

方程 $y=2x$ 的图像会是什么样子呢？为找出答案，我们选取 x 的某些值，求出相关的 y 值，然后描出这样找到的点（x，y）。此表以整齐的形式摆出计算结果：

x	0	1	2	3	-1	-2
y = 2x	0	2	4	6	-2	-4

该表向我们提供了描在图 8 中的六个点。

这六个点位于一条直线上。如果你描出更多的满足方程 $y = 2x$ 的点，你会发现，它们全都位于该直线上。简单地说，方程 $y = 2x$ 的图像是一条直线。

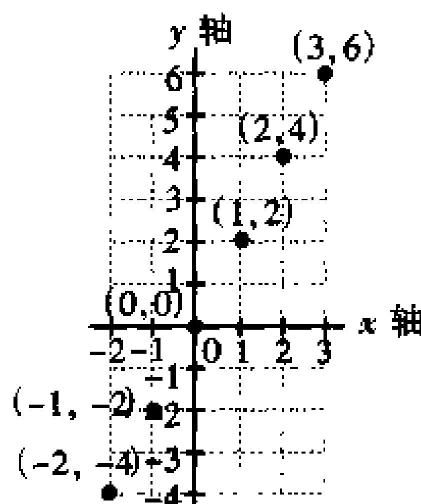


图 8

如果你有一个带指数键的计算器，你可能想描方程 $y = 2^x$ 的图像。这个图像跟我们讨论过的那两个都不一样。它是在以正比于种群大小的速率增加的种群研究中遇到的图像之一例。你也可能喜欢略绘 $y = x^3$ 和 $y = 1/x$ 的图像，它们的样子完全不同于已经提到的那些。

在迄今为止讨论过的所有方程中，方程的一边只由 y 本身组成。但是，没有必要作这样的限制。例如，你可能愿意略绘方程

$$x^2 + y^2 = 25$$

的图像。原来它是一条非常著名的曲线，你每天都能看到它。肯定允许 x 和 y 为正为负或为零。

第二十五章 为什么负负得正

“为什么 - 1 乘 - 1 等于 1 而不是 - 1?”对这个问题的回答常常是，“就该这样。别再提这样的问题。”这个回答暗示有什么奥秘，对大多数人来说都太深奥以致无法理解。根本没有什么奥秘，也没有什么深奥的东西。这里，在这一章，我从三个不同的角度给出三种独立的解释。所有这三种情形都告诉我们，- 1 乘 - 1 应当是 1。

这些解释基于两条原则：“保持生活的单纯”和“我们，而不是数，是主人”。虽然这两条都不深奥，但我们马上就会看到，是有用的。当我们在第十七章定义指数时，已经应用了这两条原理。

我的第一个解释涉及分配律。虽然我们在第十七章讨论过这一法则，但我还想复习一下，因为它是连接加法和乘法的伟大桥梁。图 1 展示一个矩形被分割成两个小矩形，以此形象地介绍这一法则。

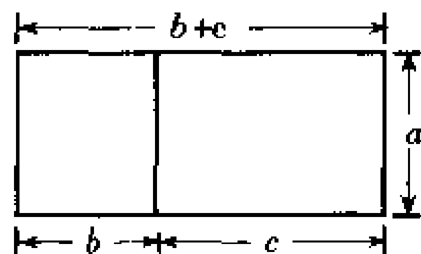


图 1

因为矩形的面积是其宽与长的乘积，这两个小矩形的面积是乘积 ab 和 ac 。整个矩形的面积是 a（b + c)。因为整个矩形的面积是这两个小矩形的面积之和，我们有

$$a(b+c)=ab+ac。$$

这个涉及两个加法和三个乘法的等式就是分配律。

图1表明，当a，b，c三数都是正数时，分配律成立。为了保持生活的单纯，我们想要这同一法则在三个数中有一个或几个为负数时也成立。我们是主人，我们不想记不必要的法则。以这些抽象的原则为指导，让我们来看－1乘－1应当是什么。

首先，让我们约定，0乘任何数为0，1乘任何数为该数。例如，$(1)\times(-1)=-1$。正数乘负数逻辑上应为负数。（在足球中，损失2码记分为－2。如果三次带球前进过程中每一次都发生这种情况，那么总的结果记分为－6。因此，$3\times(-2)=-6$。同样的逻辑也适用于支票账户。）

注意，－1的基本性质就是，如果你把它加到1上，就得到0。因此，我们从方程

$$(-1)+1=0$$

开始是合理的，或许是不可避免的。为了使分配律起作用，我将以－1乘此等式的两边，得到

$$(-1)[(-1)+1]=(-1)0。$$

因为我们想要分配律对所有数都成立，不论它们是正是负，所以我们必须要有

$$(-1)(-1)+(-1)1=(-1)0。$$

注意，因为1乘任何数为该数，故$(-1)1=-1$，而0乘任何数为0，故$(-1)0=0$。于是我们有

$$(-1)(-1)+-1=0。$$

将1加于等式的两边，消去左边的－1，而右边则以1代0。这就给予我们以等式

$$(-1)(-1)=1。$$

简单地说，如果分配律对所有数都成立，那么 -1 乘 -1 就必须是 1。

你可以验证，同样的推理表明，任何两个负数的乘积一定是正数。(以 $(-2)(-3)$ 的情形作为一个典型的例子，并以 -3 乘等式 $2+(-2)=0$ 的两边。)

分配律，再加上我们的单纯性目标和我们是主人的认识，引导我们把两个负数的乘积定为正数。但是，是否会有别的法则向我们提示别的什么呢？如果有，那就会一片混乱。幸好，不论我们选用何种方法来定义乘积 $(-1)(-1)$，总是引导我们把它定为 1，而不是 -1。

例如，让我们来看指数法则会告诉我们什么。对于自然数 x 和 y，我们有法则

$$(2^x)^y = 2^{xy}。$$

(这个法则在第十七章讨论过。) 让我们宣称，这个法则甚至当两个指数 x 和 y 都是 -1 时也成立。

于是，我们必须有

$$(2^{-1})^{-1} = 2^{(-1)(-1)}。 \qquad (1)$$

但是，正如我们在第十七章所见，2^{-1} 就是 2 的倒数，即 1/2。因此 $(2^{-1})^{-1}$ 是 1/2 的倒数，即 2。这就是说，

$$(2^{-1})^{-1} = \left[\frac{1}{2}\right]^{-1} = 2。$$

注意，2 等于 2^1。所以等式 (1) 归结为等式

$$2^1 = 2^{(-1)(-1)}。$$

上述等式再次提示，-1 乘 -1 应当是 1。

我对 -1 乘 -1 为什么应为 1 的第三个解释涉及到方程的

图像。正如我们在第二十四章所见，等式 $y=2x$ 的图像是一条直线。如果你用几个正的 a 值进行实验，你会看到 $y=ax$ 的图像是一条直线。所以，为保持生活的单纯性，我们希望，即使 a 为负数，$y=ax$ 的图像也是直线。具体地说，让我们来看方程 $y=(-2)x$ 的图像。

为着手画图，我选取几个正的 x 值，并计算出相应的 y 值，它等于（-2）乘 x。例如，当 x 为 2 时，y 为 $(-2)\times(2)=-4$。

x	1	2	3	4
$y=(-2)x$	-2	-4	-6	-8

这四个 x 值和四个 y 值给出图像上的四个点，如图 2 所示。对正数 x，$y=(-2)x$ 的图像示于图 2。

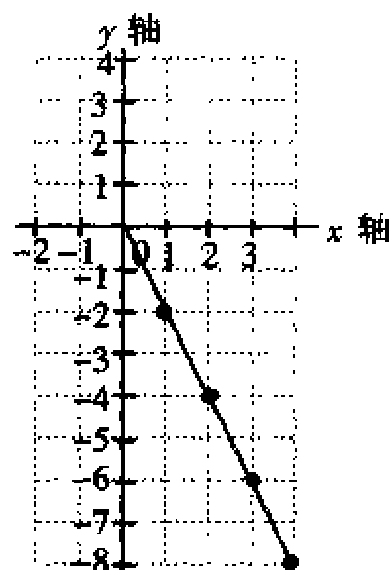


图 2

对正数 x，$y=(-2)x$ 的图像，只是一条直线的一部分。如果我们想要它当 x 为负数时继续沿着那条直线，那么，比方说，当 $x=-3$ 时，y 应当是什么？当你沿这直线上行时，你向左走一个单位，相应地就向上走两个单位。所以，如果你向 0 的左边移动 3 个单位，你就应该另外上升 6 个单位。换句话说，点（-3，6）也应当在该图像上。这就意味着，当 x 为 -3 时，乘积（-2）（-3）应当为 6，一个正数。于是，对所有正负

x，y＝（－2）x 的图像就是惟一的一条直线，如图 3 所示。

这有助于保持我们生活的单纯。再一次，“负乘负应该得正。”用粗糙的速记法来写，就是－×－＝＋。

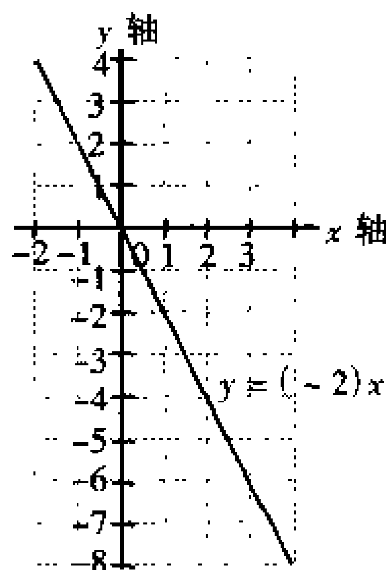


图 3

所有三种方法都把我们引到同一结论，不论指导原则是分配律，还是指数性质，或是方程的图像。这些全都发生在自给自足的数学世界里。但是，正如我就要借助于一块跷跷板来说明的，即使在物理世界中遇到“负乘负”，也应当为正。

图 4 表示一块跷跷板，以 F 为平衡点。在板上画出数直线的一部分（置 0 于 F 处），以显示到 F 的距离。

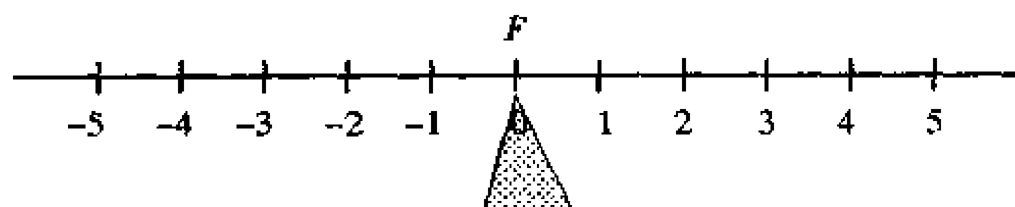


图 4

板上的位置可正可负，而且，人在板上可以使板向上向下。物理学家称向上的力为正，向下的力为负。力可产生逆时针或顺时针的效果，视它作用于何处而定。力离 F 越远，它产生的旋转倾向越大。物理学家用力和力的作用位置的坐标之乘积来衡量这一旋转倾向：

旋转倾向＝力乘位置。

例如，在坐标为 4 的点处一个向上的 6 磅力，产生的旋转

倾向为 6×4。一个向下的 6 磅力作用在 -4 处产生的旋转倾向为 $(-6)\times(-4)$。但是，略看一下图 5 便知，这两个倾向应当是一样的，都是逆时针向。

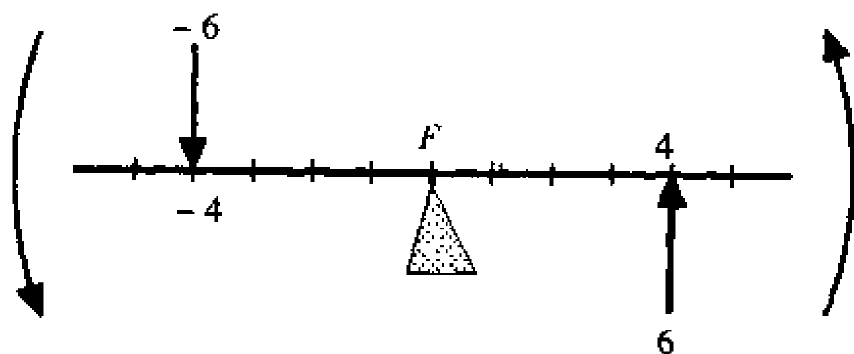


图 5

因此，物理学家乐意于 $(-6)\times(-4)$ 等于 6×4，为一个正数。

在数学世界或我们周围的世界中，负乘负永远应当为正。在理论或实践中，这样选取永远是最佳的。假如任何人能找到一种情形，提出这个乘积为负，我将感到十分意外。谁想要使这个乘积为负，他就必须发明一种新的数系。

第二十六章　新观点看幼儿园

正是在幼儿园或一年级，我们大部分人开始我们的数学旅程。我们就是在那里明白了符号 1，2，3，4，5，6，7，8，9 的意义。例如，我们引进 2 的观念就意味着看类似于图 1 的图形，图 1 展示两个苹果。

另一个图形可能像图 2 一样，展示两个香蕉。

然后，老师要求我们说明，香蕉正好和苹果一样多。为此，我们把每个苹果和一个香蕉配对，在它们之间画一条线作为标志，如图 3。

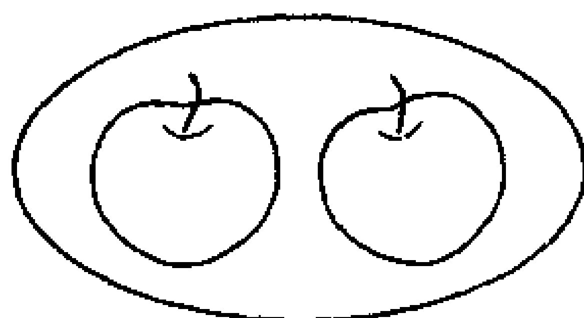


图 1

如果我们能够把所有的苹果同所有的香蕉如此配对，我们就说香蕉和苹果一样多。为了对它作更形式化的处理，我们现在换个说法，“苹果的集合和香蕉的集合是等数的。”这就把我们带到了本章的关键性概念。

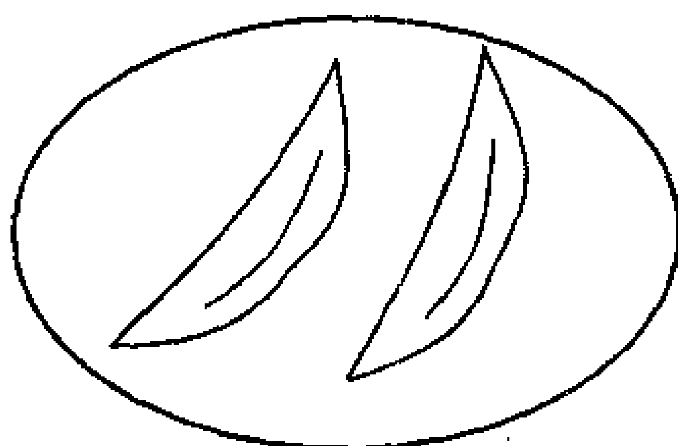


图 2

让我们约定，如果我们能够把一个集合中的所有对象同另一个集合中的所有对象一一配对，我们就称这两个集合等数。这是一个十分精确的定义，我们将严格遵从。它看起来好像是一个比较幼稚的概念，但是，正如我们即将看到的那样，它远

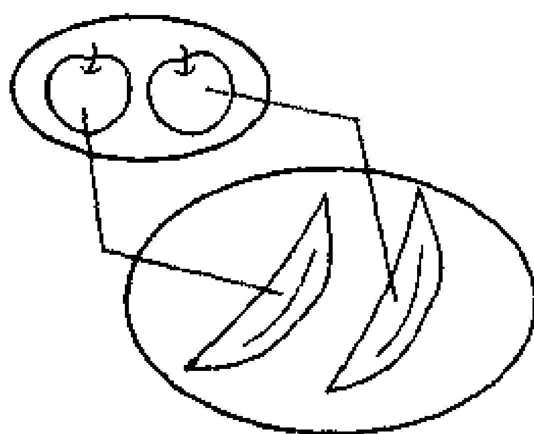


图 3

不是平凡的。

作为一个简单的例子，考察你所有的左鞋集合和右鞋集合。因为每一只左鞋能够同与之相应的右鞋配对，所以这两个集合等数。（这里假定你没有丢失任何鞋子。）丈夫集合和妻子集合也是等数的（假定没有重婚）。

迄今为止，毫无意外。

现在考虑所有从 0 到 2 的数所成集合和所有从 0 到 1 的数所成集合。我们可以把第一个集合想象成一个 2 吋长的线段，而把第二个想象成一个 1 吋长的线段，如图 4。

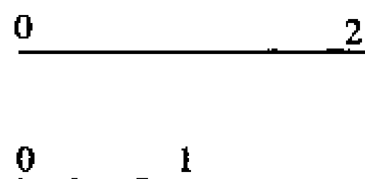


图 4

按照我们的精确定义，这两个集合是等数的吗？一个线段的长度是另一个的两倍，但长度在等数的定义中不起作用。事实上，如图 5 所提示，这两个集合真是等数。

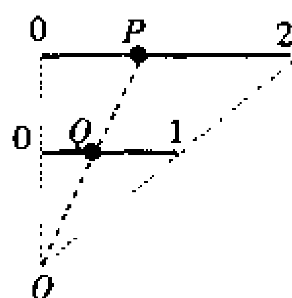


图 5

对长线段内的每一点 P，作一条到点 O 的直线。图 5 中用虚线表示的这条直线，在点 Q 处穿过短线段。按照这种方式，较长集合内的每一点，恰好与较短集合内的一点配对，反之亦然。因此，根据等数的定义，这两个集合是等数的。

看起来好像很奇怪，一个线段的长度可以两倍于另一线段，但却正好与该线段有同样多的点。虽然出人意外，但看过电影的人不应感到震惊。银幕上的大图像只不过是影片上小图像的放大。大图像的每一点和小图像的每一点有一个配对关

系，如图6所示。

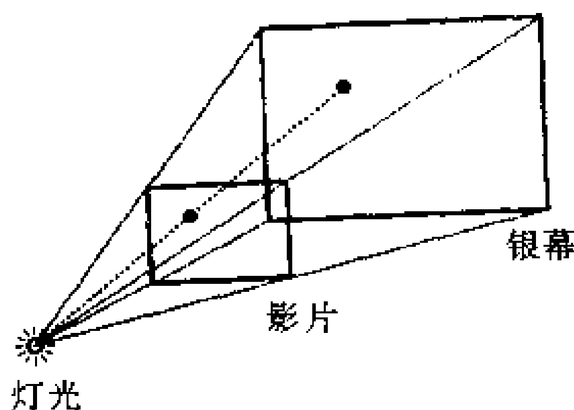


图6

如果量度的话，比方说，以平方吋计，则银幕的图像有较大的面积。但是，等数与面积无关。它只关乎能否把一个集合中的对象与另一集合中的对象一一配对。

让我们举另一个例子。设集合N由自然数1，2，3，4……构成。另一集合B由平面内两坐标都是自然数的点构成。图7展示这两个集合中的一部分。

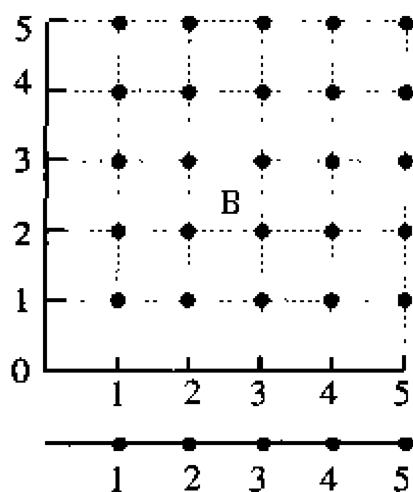


图7

集合B与N是等数的吗？我们能否把1，2，3，4……中的每一个数和无穷集合B中的一个点配对，使得B中每一点都有一个数与之配对呢？乍一看来，这似乎是不可能的。毕竟，集合B中每一水平行上的点已经与集合N等数。然而，集合B和N还真是等数的。为证明它们等数，我们必须描述一种使自然数与B中的点“成婚”的方式。

为了实现这种配对，设想B中每一点代表一株桔树，而你希望检查每一株树，看桔子是否成熟。假如你只是沿着最底下一行走直路，你就看不到大部分果树。但是，有一条路线能使你检查到每一株树。它是受一位农夫开着拖拉机犁田的路线

的启示。它就是图 8 所示的之字形路径。

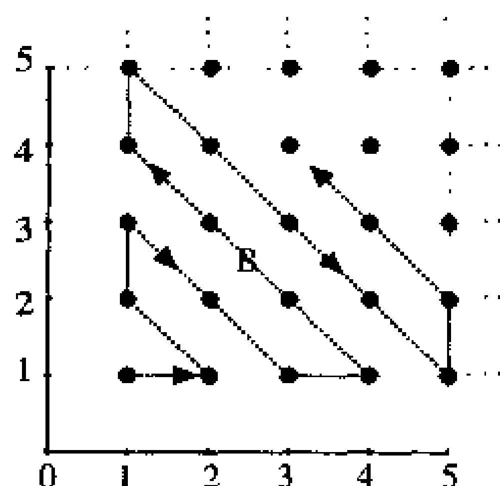


图 8

当你从左下角出发沿这个路径进行时，你一边检查这些树，一边给它们编号。这就使自然数 N 和果园中的树成对相配。每一株树得到一个自然数的编号。每一个自然数是某一株树的编号。于是，初看起来似乎比自然数集合“更无穷”的果树集合，仍然与之等数。

让我们暂停前进，而来回顾一下，利用精确的等数概念，我们都做了什么。首先，我们证明了，一个线段等数于一个长度为其两倍的线段。第二，我们证明了，一个小矩形（影片）等数于一个大矩形（银幕）。第三，我们证明了，一个果树集合等数于自然数集合，这个果树集合由一行一行的果树构成，每一行都与自然数集合等数。

怎么回事呢？能否任何两个无穷集合都是等数的呢？换句话说，无穷的“大小”是否都一样，是不是没有无穷集合比另一个无穷集合“更无穷”？对于有限集合，肯定有不同级别的大小。例如，三个香蕉的集合和两个苹果的集合是不等数的。不论你如何力图使苹果和香蕉配对，总会剩下一个香蕉。这就是我们说“三大于二”时的意思，也是为什么我们需要两个符号 3 和 2 来表示不同级别的有限的原因。

让我们回到无穷集合和这一问题：“所有无穷集合都是等数的吗？”这个问题2000年前就可以问，但直到19世纪下半

叶才由乔格·康托尔（1845—1918）提出。正如他在 1873 年 11 月 29 日给另一数学家理查德·戴德金（1831—1916）的一封信中所写，

> 我可以问你一个问题吗？……这个问题我回答不了；也许你能回答，而且会慷慨地告诉我。这个问题如下。取所有自然数的集合，称之为 N，以及所有实数的集合，记为 R。于是，这个问题就是：能否让 N 同 R 配对，使得一个集合中的每个数，对应于另一集合的一个而且只是一个数？乍一看来，有人会自言自语，“不，这不可能，因为 N 由离散的部分构成而 R 是一个连续统。”但是，这样的异议什么也没有证明。我也同样感觉，N 和 R 不会容许这样的配对，但我还找不出理由。正是这个理由让我困惑，可能它很简单。
>
> 乍一看来，人们不会猜想 N 不能与所有正有理数 p/q 的集合配对吗？然而不难证明，这样的配对能够找到。

康托尔提到的有理数同自然数的配对，可以借助于我们的果树集合进行设计。如图 9。把这些分数像树一样排列，在每一行中，分子保持不变。

然后，沿着你通过果树园所走的同一路径进行，你一边走，一边给自然数和分数配对。当然，你甚至把 1/2，2/4，3/6，4/8，……都算做了不同的数，但它们表示同一个有理

数。如果你不想重复计数有理数，可以从图9中删去未经化简为最低项的任何分数，只保留那些已化简的分数。然后采取同一路线计数剩下的分数，当你沿同样的之字形路径走过它们时。

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	…
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	…
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	…
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	…
1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	…

图 9

戴德金回了信，但没有解决这个问题。在12月2日，康托尔再次写信给他：

> 我由于下述原因提出我的问题。许多年前我就考虑过它，并且总是留下疑问，不知这个问题表现出的困难，是主观方面的，还是实际的，本体所固有的。我从未认真地思索过它，因为它对我没有特殊的实际兴趣，而且，如果你说由于这个原因它不值得花费太多精力，我完全同意你的意见。只是，它定会是一个漂亮的结果……。

在写过这封信的一周之内，康托尔完成了最激动人心最基本的数学发现之一：并非所有无穷集合都是等数的。无穷有不同级别，正如有限有不同级别一样。这个结果对20世纪数学的影响，就像2300多年前无理数的发现对希腊数学的影响一样重大。

康托尔在1873年发现的论证比较复杂，但他在1890年发

现了一个较为简单的论证。我们将要介绍的就是第二个。

记住，N是自然数1，2，3，4，……的集合，R是正实数的集合。我们要证明，不可能使N的所有成员同R的所有成员一一配对。换个提法，不可能按“第一”、“第二”，“第三”等等列举出所有正实数（纵然我们能够利用之字形路径列举出所有的正有理数）。

康托尔所做的事情就是指出，对列举正实数的任何表，总有一数不在表上。这就表明，不可能使N同R一一配对。当然，我们可使N同R的一部分配对，比方说，以1配1/1，以2配1/2，以3配1/3，如此等等，以每一个自然数配它的倒数。但是，我们永远不可能使N同R的所有成员配对。

现在来看康托尔的推理。设想有任何一张正实数表。表中每一个数对应于自然数1，2，3，……之一。于是，这张表可能看起来像下面那张。（我用特殊数，为的是避免许多符号乱七八糟。这个推理适用于任何这样的表。）记住，这表是没有尽头的，而且一旦定下来就永远不变。下面只是展示表中的前几个数。

1… 10.387425…

2… 7.084416…

3… 0.250000…

4… 113.333333…

5… 0.912664…

………………………………

在表中第一个数小数点右边的第一个数字下划线。然后在表中第二个数小数点右边的第二个数字下划线。然后在第三个

数小数点右边的第三个数字下划线，如此等等。划线之后的这些数字如下表所示。

1… 10.387425…

2… 7.084416…

3… 0.250000…

4… 113.333333…

5… 0.912664…

………………………………

别去管那些没划线的数字。它们在此推理中不起任何作用。只有这一串划线的数字有用，它们构成一条无穷的下向对角线。

康托尔利用这条对角线构造一个数，称之为 r，然后他证明，r 不在该表上。这个数貌似：

$$r = 0._\ _\ _\ _\ _\cdots\cdots$$

我们必须弄清楚待填的空白处应当放些什么数字。

为方便起见，我们依次写下划线的数字：

$$\underline{3}\ \underline{8}\ \underline{0}\ \underline{3}\ \underline{6}\cdots$$

在其中的每一个数字下面写一个与之不同的数字。为了自动完成这一工作，不必一次一次地选择，我们制定一条规则：如果划线的数字是 8，就写一个 7；如果划线的数字不是 8，那就写一个 8。于是，r 就是这样一个数，其 10 进制形式由我们的规则给定。在我们的特例中，它的开头是

$$r = 0.87888\cdots\cdots$$

此数 r 不可能在表中任何地方出现。（在继续往下阅读之前，想想这个结论。它能是第一个数吗？第二个？第三个？）

它不能是第一个数，因为它在小数点后第一位已经与第一

个数不同。它不能是第二个数，因为它在小数点后第二位已经与该数不同。它不能是第三个数，因为它们在第三位已经不同。更一般地说，至少在第n个小数位上，它与表中第n个数不同。所以，r不能在表上任何地方出现。这一论证适用于所有可能的表，而不只是我们由之出发的那张。

我们必须作出结论，不可能使N与R一一配对。由正实数集合所代表的无穷的级别，真正大于由自然数集合所代表的无穷的级别。就像你试图把两个苹果同三个香蕉配对，你总会剩下一个香蕉一样，当你试图把自然数同实数配对时，你总会有实数剩下。

我们必须作出结论，有各种各样“大小”的无穷集合。由自然数集合所代表的无穷是最小的。任何能与这个集合一一配对的集合称为可数集合。我们已证，有理数是可数的，而实数则否。

无理数是否可数呢？如果可数，我们就能使它们同图10中下面一行（无穷）圆点配对。

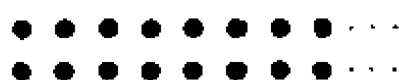


图 10

然后，我们可以让有理数同上面一行圆点配对。这样，我们就已经把所有实数同图10中所有圆点配对。但是，证明了图8中的果树是可数的同样方法表明，图10中的圆点是可数的。（农夫可以检查只有两行的全部果树。）这就意味着所有实数是可数的。因为它们不是可数的，所以我们必须作出结论，无理数是不可数的。那就是说，无理数比有理数要多。

是可数的的符号为$\aleph_0$。发音为“阿列夫零”。正像两个苹果的集合有两个成员一样，自然数集合有$\aleph_0$个成员。

$\aleph_0$是所有自然数之后的第一个数。

顺便说说，符号$\aleph$是希伯来字母系统的第一个字母。康托尔选中它是因为它在希伯来文中表示数一（单位），而且他想象无穷集合有个单位，或“一”。这就是为什么一百多年来$\aleph$（带上各种下标）用于表示无穷大小的原因。（表示实数集合大小的符号为 c，代表continuum（连续统）。）

康托尔的发现，不只是“一个漂亮的结果。”它对数学与逻辑一直有着深刻的影响。例如，在高等微积分、拓扑学和代数学中，必须十分注意无穷集合的大小。在这些领域中，有许多定理对可数集合成立，而不对所有无穷集合成立。此外，康托尔的对角线法甚至出现于逻辑学和计算机理论中。

康托尔所提的这个看似幼稚和无关紧要的问题，开创了一场革命。在数学中，跟在许多学科中一样，提出正确的问题和求得正确的答案完全同等重要。

第三篇　越来越接近

第二十七章　零除以零

设想苏格拉底向他的两位青年朋友，帕特里克和帕特丽夏，询问一个问题。

苏格拉底： 当 x 越来越靠近 1 时，商式

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

会发生什么变化？

帕特里克： 这很容易。当 x 是 1 时，分子是 1^2-1，等于 0。分母是 $1-1$，也等于 0。所以，这个商成为

$$\frac{0}{0}。$$

因为任何数除以自身得 1，故当 x 趋近于 1 时，

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

趋近于 1。

帕特丽夏： 这没有任何意义。

苏格拉底： 为什么没有？

帕特丽夏： 除以 0 是荒谬的。

苏格拉底： 为什么？

帕特丽夏： 除法是查看乘法的一种方式。当我们说"6 除以 2 等于 3"时，我们是在回答这样一个乘法问题："2 乘几等于 6"。换句话说，我们是在填等式

$$2 \times \square = 6$$

中的方框。有一种方式，而且只有一种方式，可填这个方框。但是，谈到"0 除以 0"，我们就必须填

$$0 \times \square = 0$$

中的方框。麻烦是，这个方框中填任何数都行。例如，

$$0 \times 5 = 0,$$

$$0 \times 7 = 0。$$

所以，谈"0 除以 0"是毫无意义的。它完全不同于"6 除以 2"。

苏格拉底： 但是，帕特里克说，任何数除以自身得 1。

帕特丽夏： 他说得对，但 0 除外。

苏格拉底： 那么，关于我的问题怎么样呢？当 x 越来越靠近 1 时，

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

到底会发生什么情况？

帕特里克： 我仍然认为它趋近于 1。

苏格拉底： 我们怎样找出它来。

帕特丽夏： 只须试取靠近 1 的某些 x，看会发生什么情况。

苏格拉底： 你想用哪个数？

帕特丽夏： 作为开始，让我们试试 1.1。

帕特里克： 我来作计算：

$$\frac{(1.1)^2-1}{1.1-1}=\frac{1.21-1}{0.1}=\frac{0.21}{0.1}=2.1。$$

唷，它不靠近 1。我仍然认为，如果我们选取更靠近 1 的 x，那么你的商就会靠近 1。

苏格拉底： 干吧！

帕特里克： 我将试试 1.01。那样一来，应当解决问题。现在，这商是

$$\frac{(1.01)^2-1}{1.01-1}=\frac{1.0201-1}{0.01}=\frac{0.0201}{0.01}=2.01。$$

啊—哈，它不靠近 1。我要改变我的观点。我觉得，当 x 越来越靠近 1 时，这个商会趋近于 2。

苏格拉底： 为什么是 2？

帕特里克： 它是靠近 2.01 的惟一常见数。

苏格拉底： 为什么 这个商一定要趋近一个常见数？

帕特里克： 否则，我只有放弃。

帕特丽夏： 我们不能再试试甚至更接近 1 的某个数，看会发生什么情况吗？

苏格拉底： 试吧！

帕特丽夏： 我将试试 x = 1.0001。于是我得到

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1.0001^2-1}{1.0001-1}=\frac{1.00020001-1}{0.0001}$$

$=\frac{0.00020001}{0.0001}=2.0001$。它的确接近于 2。这次可能帕特里克是对的。我想，当 x 越来越靠近 1 时这个商趋近于 2。

苏格拉底： 你绝对肯定？

帕特丽夏： 是的。

苏格拉底： 但是，也许这个商趋近于 1.999999976 呢？那也是可能的吧？

帕特丽夏： 那是可能的，但如果真是那样，我会感到惊异。

苏格拉底： 在这方面，你们两人一致，而且你们有坚定的看法。但是，你们没有确凿无疑地真正解决这个问题。

帕特丽夏： 我有一个看法。只要我们使用特殊的方法，我们就永远不能肯定。但是，这个商

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

使我想起了我以前曾经见过的某些商，只是字母为 r 而非 x。我想起来了。有这样一个等式：

$$\frac{1-r^{k+1}}{1-r}=1+r+r^2+\cdots+r^k。$$

我在这本书中看到过它。

$k=1$ 的情形就是

$$\frac{1-r^2}{1-r}=1+r。$$

但是，

$$\frac{1-r^2}{1-r}=\frac{r^2-1}{r-1}。$$

因此

$$\frac{r^2-1}{r-1}=1+r。$$

当 r 不是 1 时这个等式有意义。如果我用字母 x 代替 r，左边恰好就是你的商：

$$\frac{x^2-1}{x-1}=1+x。$$

帕特里克： 那又怎样呢？

帕特丽夏： 看 $1+x$ 如何变化要比看这个商如何变化容易得多。

帕特里克： 你是对的。当 x 靠近 1 时，$1+x$ 靠近 $1+1$，它就是 2。我不必担心除以 0。因此，当 x 越来越靠近 1 时，那个商的确趋近于 2。这就是我已经说过的。

苏格拉底： 那么，当 x 越来越靠近 1 时，

$$\frac{x^3-1}{x-1}$$

会怎样？

帕特里克： 我敢断定它越来越接近 2。

帕特丽夏： 我不知道，但我将对此用同样的方法，写出

$$\frac{x^3-1}{x-1}=1+x+x^2。$$

当 x 越来越靠近 1 时，$1+x+x^2$ 越来越靠近 $1+1+1$，它等于 3。所以，我确信，这个商趋近于 3。

苏格拉底： 那么，帕特里克的猜想错了吗？

帕特里克： 这不公平。它使用了诡计。

苏格拉底： 她第一次用它，你可以称之为诡计。但第二次不是。另一方面，像一把锤子或钳子一样，它只是一

个工具。你能把锤子称为诡计吗？

帕特里克： 一个等式不是一把锤子。我仍然认为，这个商趋近于2。

苏格拉底： 顽固的家伙！

帕特丽夏： 如果他还是不相信它趋近于3，我想我能让他恢复正常。

苏格拉底： 有什么办法？

帕特丽夏： 我将用一个靠近1的特殊数，比如说1.01。于是，这个商就是

$$\frac{1.01^3-1}{1.01-1}=\frac{1.030301-1}{0.01}=3.0301。$$

怎么样，帕特里克？

帕特里克： 我投降，它是3。

苏格拉底： 我们这次谈话的启示是什么呢？

帕特里克： 远离零除以零。

帕特丽夏： 不。当你看到零除以零时要小心谨慎。

苏格拉底： 是的。当你用一个小数去除一个小数时，这个商可能很大很大，可能很小很小，也可能在两者之间的任何地方。两个小数的乘积，或它们的和，或它们的差，就都不是这样。在每一种情形下，你都会得到一个小数。除法完全是另外一回事。在一个小数除以另一个小数时，什么情况都可能发生。

第二十八章　一条曲线有多陡?

当你看一张旧金山地图时，你根本不会想到这个城市的老城区有山。那里的街道都顺直线走。它们不顾任何障碍，一个劲儿爬上爬下这些山峰，而不是沿着周边行进。1906年地震之后，曾有一个短暂的时间，试图让街道顺应自然，但未获成功，因为人们立刻搬回了他们的老地方。当你开车沿着一条陡峭的街道往上行驶，快要达到顶部时，你看到的只是蓝天在前。你不能肯定，是这条街道会继续往前延伸，还是你会从悬崖上坠下。

旧金山最陡的街道有多陡？人们通常猜测，它与水平面构成一个约为45°的角。这就意味着，每前进1呎，即每有1呎的水平运动，就上升1呎。这个陡峭度如图1所示。

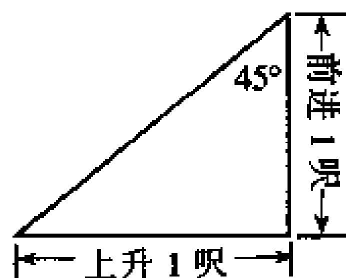


图1

实际上，汽车使用的最陡街道是菲尔伯特，它的角只是17.5°，即当前进100呎时只是上升31.5呎。它的陡峭度如图2所示。

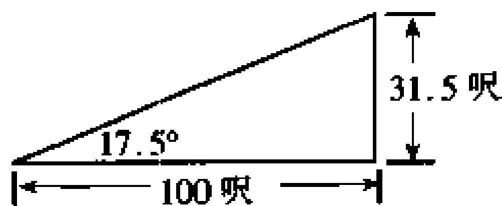


图2

正如我们所看到的，衡量一条直线的陡峭度有两种方式。或者给出它与水平面构成的角，或者指出，对于一定的（水平）前

进行程，上升高度是多少。我们将采用第二种方法，用商数

$$\frac{上升高度}{前进行程}$$

来描写陡峭度，称这个商为该直线的斜率。木工称之为（屋顶的）斜度，而公路工程师称之为（道路的）坡度。顺便说一下，一个 A－结构的房屋，其最小斜度应为 1.3，以便泻雪。州际公路系统的任何部分，坡度最多为 0.06。加利福尼亚的一条新路获准最陡的坡度为 0.09，但只限于市内丘陵区。

图 1 中斜线的斜率是 1/1，即 1。在图 2 中，斜率是 31.5/100 = 0.315。斜率越大，直线越陡。

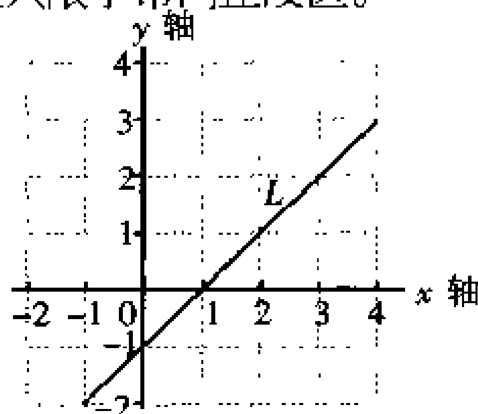


图 3

现在，让我们考察 xy 平面内直线的斜率，而不是山的斜率。设 L 是 xy 平面内的一条直线，如图 3 所示。

在 L 上任意选择两点，称之为 P 与 Q，让 P 在 Q 的左边，如图 4。

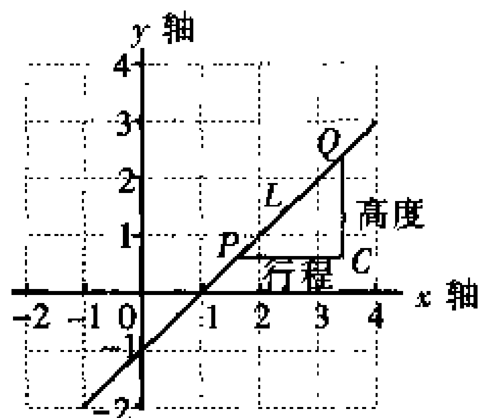


图 4

这两点决定一个直角三角形 PCQ，其直角边平行于坐标轴，如图 4。PC 的长度是前进行程。它是 x 的改变量。垂直边 QC 决定上升高度。它是 y 的改变量。如果当我们沿着这条直线从 P 移动到 Q 时，我们是向上运动，如图 4，则上升高度取为正数。但是，如果当我们沿着这条直线从左往右时，我们是往下走，则上升高度取为负数。图 5 所示的直线

就是如此。(这个词组“负的上升高度”,听起来有点奇怪,但是,描述经济或人口衰减的词组“负增长”不也是这样吗!此外,和上行一样,电梯也下行。)

平面内一条直线的陡峭度,或斜率,是商数

$$\frac{上升高度}{前进行程},$$

它可以是负的,如图5。(道路,屋顶等等的斜率永远取为正数。)

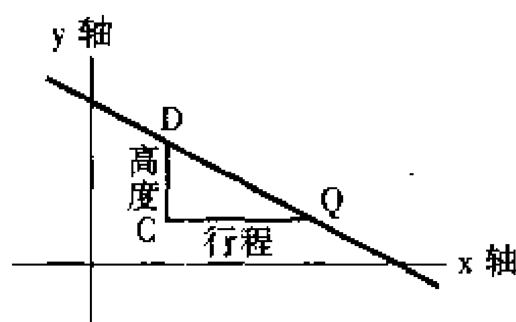


图 5

作为练习,请画出 x 轴,y 轴和一条不平行 y 轴的直线 L。在直线上取两点 P 与 Q,量出它们所确定的前进行程和上升高度(最好以厘米计,以便计算)。然后计算斜率。对直线上的另外两点,照做一次。你应该得到相同的斜率——或几乎相同,因为在测量中总有微小误差。

关于直线的斜率就说到这里。但是,曲线的斜率是什么呢?图6显示出曲线 $y = x^2$ 的一部分。

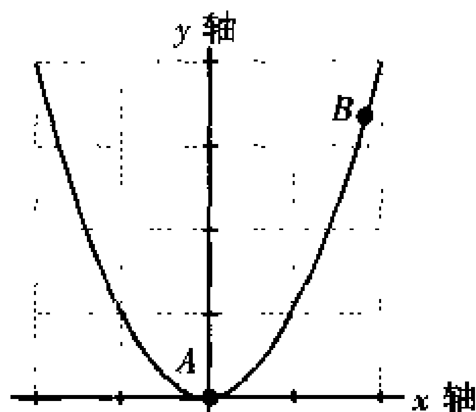


图 6

靠近点 A 的部分一点也不陡。当你沿着这曲线从 A 向右移动时,陡峭度增加。在点 B 处,曲线很陡。当陡峭度随点而变的时候,我们怎样才能衡量一条曲线的陡峭度呢?

特殊而实在地说,我们想要知道该曲线在点 P=(1,1)处有多陡。我们可用直尺画一条通过 P 的直线 T,让它看起来

像在点P与该曲线沿同一方向运动。T只是接触该曲线，但不越过它。称T为该曲线的切线（tangent），来自拉丁文tangere（接触）。

在画T时自然会有一些误差，因为该曲线靠近P的“方向”是难以估计的。但是，至少我们可以使用T上的两点，例如P和另一点Q，估计出T的斜率。图7中就这样作了。

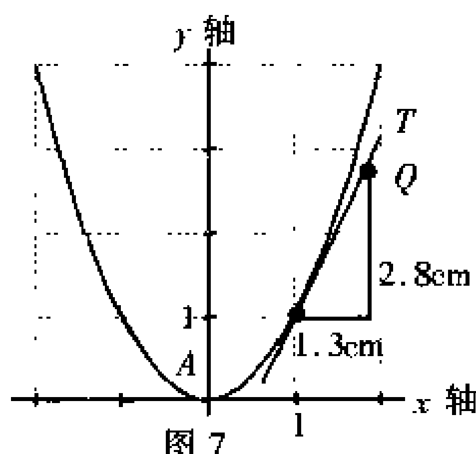


图 7

在我的估计值中，前进行程约为1.3厘米，上升高度约为2.8厘米。因此，这个斜率的估计值为

$$\text{斜率} \approx \frac{2.8}{1.3} \approx 2.2\text{。}$$

这只是一个估计值。我建议你作一个更大得多的曲线 $y = x^2$ 的草图，并尽可能地画出P＝（1，1）处的切线T。然后沿T作一个大三角形，以获得一个上升高度和前进行程。

如果你有足够的时间和纸张，你可以作一个该曲线的巨大图形，画出（1，1）处的切线，更精确一些地估计出斜率。但是你要注意，切线T的角度稍有变化，可使斜率发生很大的改变。此外，一个估计只是一个估计，甚至一百个估计也只是一百个估计。

那么，我们怎样才能求出（1，1）处切线的准确斜率呢？记住，这个切线T的斜率，与该曲线在（1，1）处的斜率相同。幸好，另有一法应付这一挑战，它不需要我们画什么。现

在让我们来看这另一种方法。

在曲线上选取适当靠近 P 的一点 Q。点 P 和 Q 决定一条直线 L。这条直线称为由 P 和 Q 决定的割线。这条直线位于 P 和 Q 之间的部分称为由 P 和 Q 决定的弦。L 当然不是 P 处的切线，但确实有点相似。如图 8 所示。

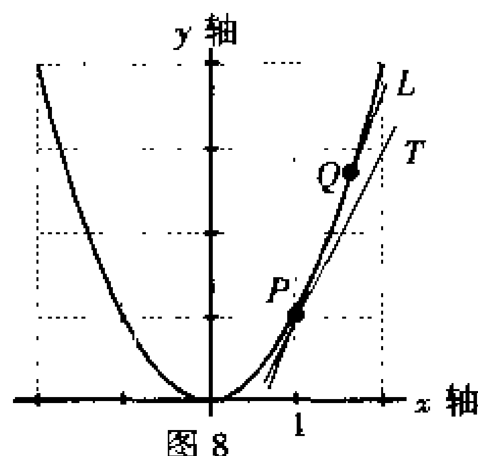


图 8

你选取的 Q 越接近 P，直线 L 看起来就越像切线 T。你可以在你自己的图形上直接验证这点。所以，L 的斜率给 T 的斜率提供了一个估计值。

为获得对这一不同方法的感觉，让我们来看看，对于特殊选取的某些点 Q，我们得到什么样的估计。例如，取 Q 为该曲线上以 1.1 为 x 坐标的点。因为曲线方程为 $y = x^2$，故 Q 的 y 坐标是 1.1 的平方，即 1.21。图 9 显示 P＝（1，1）和 Q＝（1.1，1.21）。

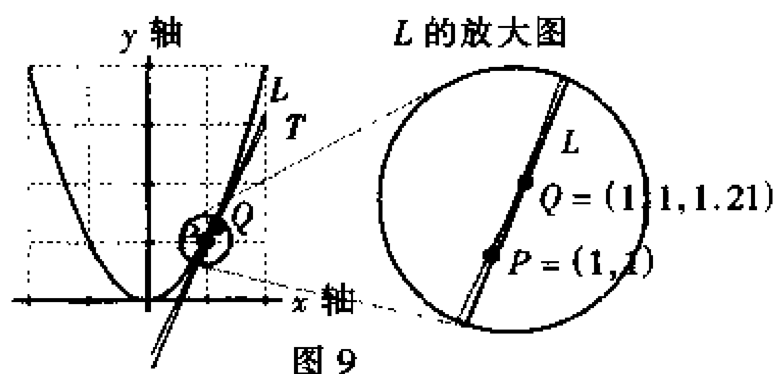


图 9

为求过 P 与 Q 的直线 L 的斜率，画出由这两点所决定的微小“高度 - 行程”三角形。图 10 显示这个三角形，稍微有所放大。

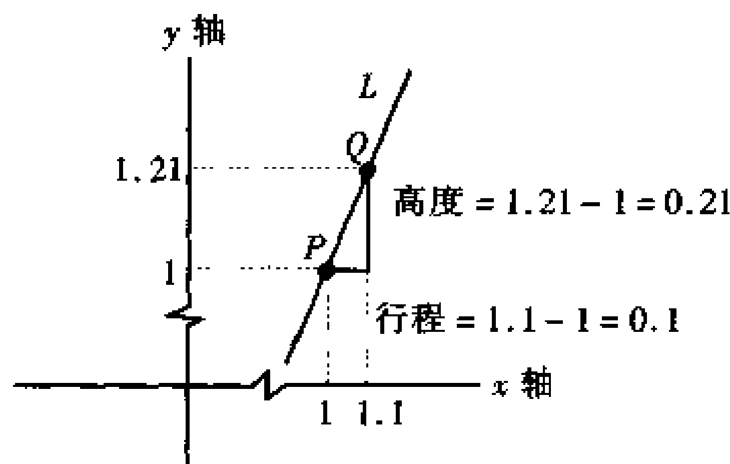


图 10

在这个小三角形中，上升高度的精确值是 1.21 - 1 = 0.21，而前进行程是 1.1 - 1 = 0.1。所以，过 P 与 Q 的近似直线 L 的斜率为

$$\frac{\text{上升高度}}{\text{前进行程}} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1。$$

这只是点 P 处切线斜率的另一个估计。但是，与我们前面的估计相对照，我们实际上根本不需要画什么。图 10 只是作为我们思考问题的一个向导。我们的计算不依赖它。当然，这只是一个估计。

为了对点 P 的斜率有一个更好的估计，在该曲线上选取更接近于 P = (1, 1) 的一点 Q。例如，这次选取以 1.01 为 x 坐标的点 Q。于是，Q = $(1.01, 1.01^2)$ = (1.01, 1.0201)。根本不必作任何图，我们求得直线 PQ 的斜率为

$$\frac{\text{上升高度}}{\text{前进行程}} = \frac{1.0201 - 1}{1.01 - 1} = \frac{0.0201}{0.01} = 2.01。$$

注意这个魔术：我们甚至连该曲线，或 P，或 Q，或通过 P 与 Q 的直线，都没有画。

我们仍然不知道 P 处切线 T 的斜率。我们的前两个估计 2.1 和 2.01 可能暗示，T 的斜率是 2。它是靠近 2.01 的惟一常见数，但我们不能肯定 T 的斜率必为常见数。说不定它是 1.987，或者是涉及 2 的平方根或更奇特的什么东西的复杂表示式哩。

我们必须准确地找出，当 Q 趋近于 P 时，过 P 与 Q 的直线 L 的斜率会发生什么情况。为此，我们必须停止选取特殊点 Q，一举考察所有可能的 Q。

为此，设 x 是大于 1 的任一数，设 Q 是点（x，x^2）。让我们来看看，当 x 越来越靠近 1 时，过 P＝（1，1）与 Q＝（x，x^2）的直线的斜率会怎么样。图 11 展示一般情形。

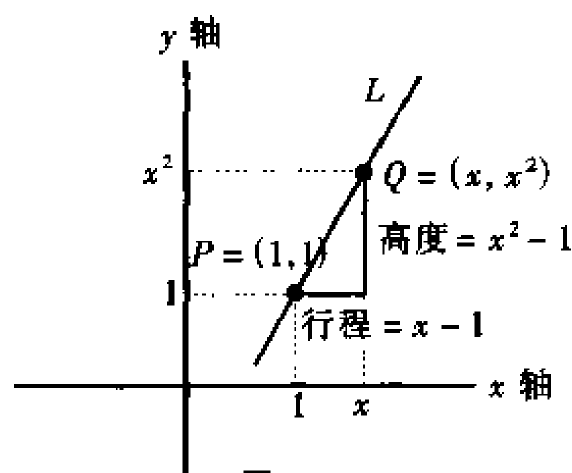


图 11

在此一般情形下，近似直线的斜率是

$$\frac{\text{上升高度}}{\text{前进行程}}=\frac{x^2-1}{x-1}。\qquad(1)$$

我们必须找出，当 x 越来越靠近 1 时，商数 1 会怎么样。但是，由于愉快的巧合，我们已经知道，当 x 趋近于 1 时这个商数如何变化。在第二十七章，在指出这个商数等于 $x+1$ 之后，我们已经看到，它趋近于 2。

这商

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

既趋近于该曲线在（1，1）处的切线 T 的斜率，又趋近于数 2。所以，这条切线的斜率确实是一个常见数，即 2。而且，根本不用画任何图，我们就求出了它。

我们说"曲线 $y=x^2$ 在（1，1）处的斜率"，到底是什么意思呢？我们指的是该曲线在（1，1）处的切线的斜率，因为这条切线提示该曲线在（1，1）附近的方向。现在我们可以说，该曲线在（1，1）处的斜率恰好是 2。

为了检验你对邻近点方法的理解，我建议你转而考虑曲线 $y=x^3$，求出它在点（1，1）处的切线斜率。注意，（1，1）确实在曲线上。（你会遇到商（x^3-1）/（$x-1$）。）然后对曲线 $y=x^4$ 如法炮制。

邻近点方法不只是对点（1，1）有效，它适用于这些曲线上的任何一点。按第二十七章的精神，它只不过要求更多一点的代数。这种方法的基本思想，已经体现在我们考虑过的实例中。在微积分课程中，这方法被用于各种各样的曲线。

在经济学，生物学，工程学，物理学，化学，工商管理等等学科中，曲线的斜率起着重要的作用。原因之一是，如果我们知道斜率的公式，我们就能找到曲线的最高点和最低点。想

要知道为什么，请看图 12 中的曲线。

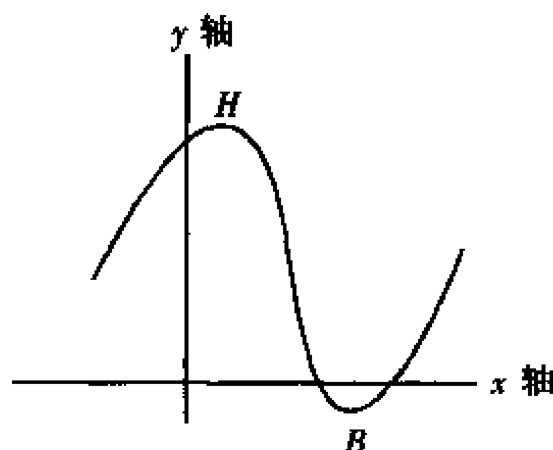


图 12

设想画出该曲线在高点 H 或低点 B 的切线。这两条直线都平行于 *x*，因而斜率为 *0*，如图 *13* 所示。（设想你让一条直尺平行于 *x* 轴。然后，将它向上滑动直到刚好与该曲线接触，或者向下直到刚好与该曲线接触。）

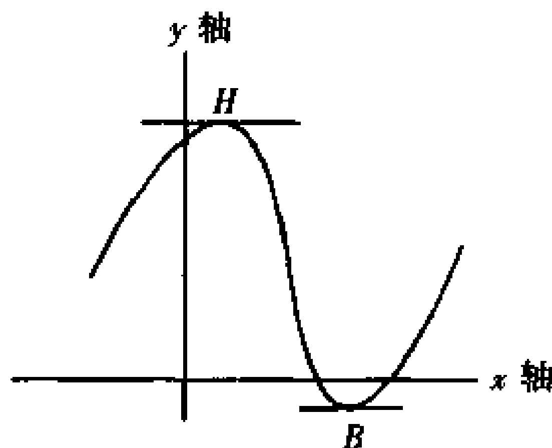


图 13

如果我们有一个该曲线在所有各点的斜率的公式，我们就会寻找在该处斜率为 0 的那些点。这就意味着解一个方程，代数课中训练过的一种技能。一位想获得最大利润的商人，或是一位想设计节约包装的工程师，就要寻找曲线的高点或低点。这只是微积分作为一个工具的许多方式之一。第三十章末尾讲述一些其他方式。

第二十九章　试求曲线围成的面积

在学校里，我们已经学过求一些图形的面积。例如，一个边长为 a 和 b 的矩形面积是乘积 ab，如图 1 所示。

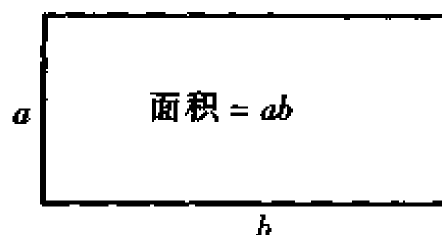


图 1

借助这一事实我们来求图 2 所示以 b 为底 h 为高的平行四边形面积。



图 2

只要把图 3 中的阴影三角形剪下来，挪到左边去，便可把这平行四边形变为面积相同的矩形。

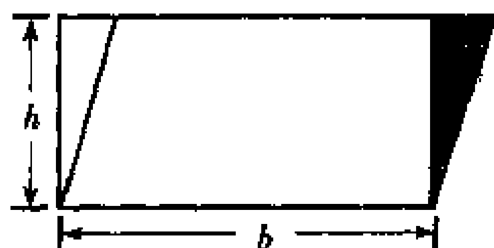


图 3

因为这个矩形的底为 b，高为 h，故其面积为 bh。因此，这个平行四边形的面积也是 bh。

现在，很快就能求出图 4 所示以 b 为底 h 为高的三角形面积。

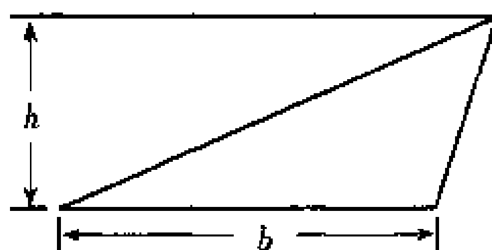


图 4

制作这个三角形的一个精确复制品，把它转过去，紧靠原来的三角形放着，如图 5 所示，以构成一个平行四边形。



图 5

因为这样构成的平行四边形面积是 bh，所以每个三角形的面积是（1/2）bh，即，底乘高的一半。

因为我们会求任何三角形的面积，我们也就会求任何多边形围成的面积：只须把它分割成一些三角形，并求出每个三角形的面积。

但是，我们如何求由一条曲线而不是一些直线段所界定的区域的面积呢？例如，我们如何求位于曲线 $y = x^2$ 之下而在 x

轴上从 0 到 1 这一段之上的面积呢？这个面积就是图 6 中阴影部分的面积。（审视图 6，我们能够知道这面积小于 1/2，因为它位于一个底和高都是 1 的三角形之内。）

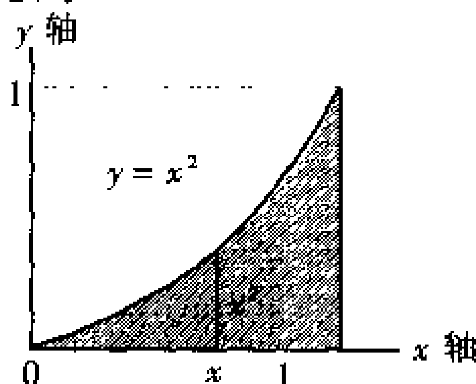


图 6

办法之一是构造一个由狭窄矩形组成的近似阶梯。这个方法可以回溯到公元前三世纪的阿基米德。

按照这个方法，你先挑出一个正整数 n，并用 n－1 个等间隔的点，把从 0 到 1 这个区间分成长度相等的 n 段。然后，你在每一段上构造一个矩形。每个矩形的高度等于曲线 $y = x^2$ 在它与该矩形右边界的交点处的高度。

为切实可行，我们以 n＝5 为例。如图 7。把从 0 到 1 这个区间分成相等的五段。在该图中，展示了五个矩形之一。

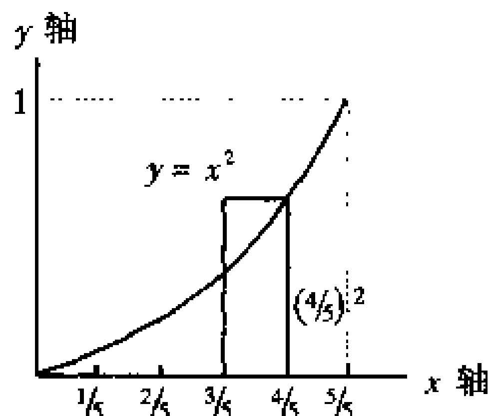


图 7

当 n＝5 时的整个阶梯展示在图 8 中。

在图 8 中，每个矩形的底为 1/5。因为曲线方程为 $y = x^2$，最小的矩形高为 $(1/5)^2$。（当 x 是 1/5 时，y 是 $(1/5)^2$。）因此，这个最小的矩形面积，作为它的高与底的乘积，是

$$(\frac{1}{5})^2\ (\frac{1}{5})\ =\frac{1}{5^2}\times\frac{1}{5}=\frac{1^2}{5^3}。$$

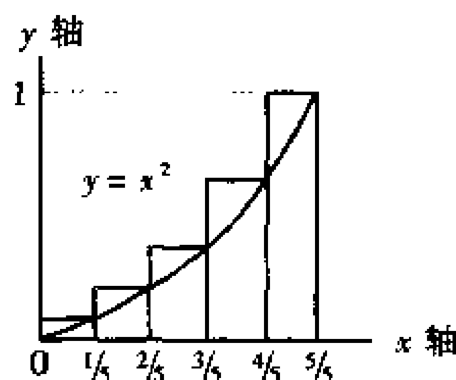


图 8

紧靠其右的矩形高为 $(\frac{2}{5})^2$。因此，它的面积是

$$(\frac{2}{5})^2\ (\frac{1}{5})\ =\frac{2^2}{5^2}\times\frac{1}{5}=\frac{2^2}{5^3}。$$

注意，对每个矩形来说，分母都是 5^3。只是分子改变。

其他三个矩形的面积可以用同样的方法求出。这五个矩形的总面积是

$$\frac{1^2}{5^3}+\frac{2^2}{5^3}+\frac{3^2}{5^3}+\frac{4^2}{5^3}+\frac{5^2}{5^3}。$$

采用公分母 5^3，可以将这个和写得简单一点，成为

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5^3}。\qquad (1)$$

编号为（1）的这个分数，只是依据五个矩形得出的 $y=x^2$ 之下的面积的一个近似值。（它等于 55/125，也就是 0.44。）

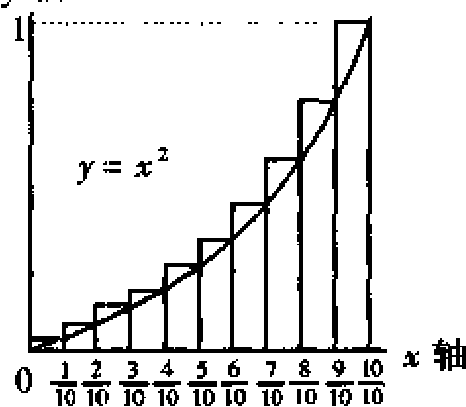


图 9

如果我们改用比方说 $n=10$，我们就会得到一个由 10 个矩形构成的阶梯，如图 9。这个阶梯的面积是该曲线之下面积的一个较好的近似。

按类似的计算，这个阶梯的总面积是

$$\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2}{10^3}。$$

(这个值是 0.385。)

关于 n = 5 和 n = 10 所构成的阶梯，是可以代表 n 为任何值的一般情形的。图 10 表明一般情形，其中 n 个矩形中的每一个宽为 1/n。

这个典型阶梯的面积是

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots n^2}{n^3}。\qquad (2)$$

当 n 增加时，分数 (2) 会怎么样？如果我们知道这个结果，我们就知道该曲线下的面积。当 n 增长时，分子也增长。这或许暗示分数要变大。但是，分母也变大。这又暗示分数或许会变小。如果分母的增长比分子快得多，这个分数甚至可能趋近于 0。但这是不可能的，因为它趋近于该曲线下的面积，一个大于 0 的数，而且，正如我们曾指出的，它小于1/2。

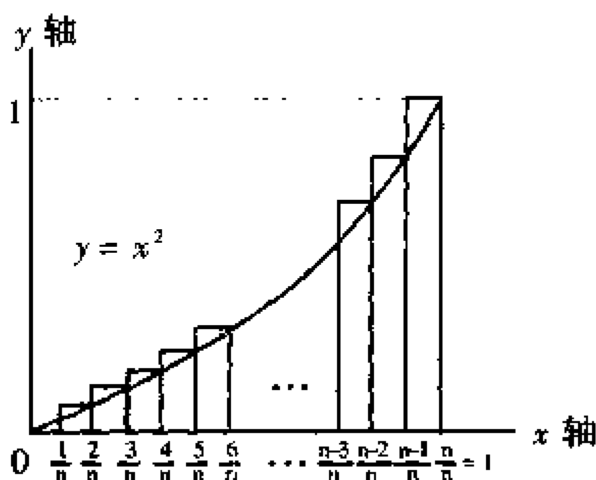


图 10

显然，在分子与分母之间，正在进行一场战斗。我们应当如何做？我们可以对 n 的各种选取计算出 (2) 的值，然后做一猜测。对 n = 5，我们求出这分数是 0.44，对 n = 10，它是 0.385。看来似乎当 n 增加时这个值减少。而且，它些估计值

总是大于该曲线下的面积，因为这些阶梯比曲线高。

如果你手边有一个计算器，请试试 $n=11$，12 等等，以求获得关于这个分数的变动方式的感觉。或许你的实验会向你提示，这个曲线下的面积是多少。或许不会。无论如何，我们遇到了障碍，因为我们不知道这个分数趋近于什么数。在第三十章，使用不同形状的阶梯，我们的确找到了这个曲线下的面积。所以，我们间接地发现了关于分数（2）会发生什么情况——这是在第三十一章有用的资料。这就意味着，我们在这一章的工作没有白费，虽然没有求出面积。

在第三十一章，我们也需要知道其他类似的分数当 n 增加时如何变化。这些分数由大指数所构成，例如

$$\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots n^4}{n^5}。 \tag{3}$$

这个分数与（2）不同之处，只在于用指数 4 代替分子中的指数 2，用指数 5 代替分母中的指数 3。你可以画一个典型的阶梯进行验证，它趋近于曲线 $y=x^4$ 之下从 0 到 1 的面积。我建议你对各种各样的 n 值算算它是多少，并猜想当 n 增加时它趋近于什么数。（下一章我们会找出这个数。）

第三十章　求曲线围成的面积

在第二十九章，我们曾试图求出曲线 $y=x^2$ 之下的面积，但未获成功。在我们的方法中，用以组成阶梯的矩形，全都有相同的宽度。但有另外一种方法，属于 17 世纪费马的工作，

确实准确地得出了那个面积。在他的方法中，矩形的宽度不同。

我们将遵循费马的推理，要用第十八章中得到的两个事实。

第一个是，对介于 -1 和 1 之间的任何数 r，

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}。$$

他需要的这个等式，其中的 r 是另一数 p 的立方，即 $r=p^3$。那就是说，他是使用等式

$$1+p^3+(p^3)^2+(p^3)^3+\cdots=\frac{1}{1-p^3}。$$

这告诉他

$$1+p^3+p^6+p^9+\cdots=\frac{1}{1-p^3}。$$

第二个是，对任何自然数 k 和异于 1 的任何数 x，

$$1+x+x^2+\cdots+x^k=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}。$$

（我们使用字母 x 而不用字母 r，是为了在本章的往后部分避免混淆。）实际上，他是上下颠倒，并以相反次序，使用这第二个事实，改写它为

$$\frac{1-x}{1-x^{k+1}}=\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^k}。$$

对每一个小于 1 的正数 p，他作一个相应的阶梯如下。首先，他在 x 轴上标出数 p，p^2，p^3，p^4，……所在的地方，如图 1。当指数 k 增加时，p^k 减少，越来越接近 0。



图 1

当我们从右向左移动时，所选的这些点越来越密集在一起。它们也越来越接近 0。

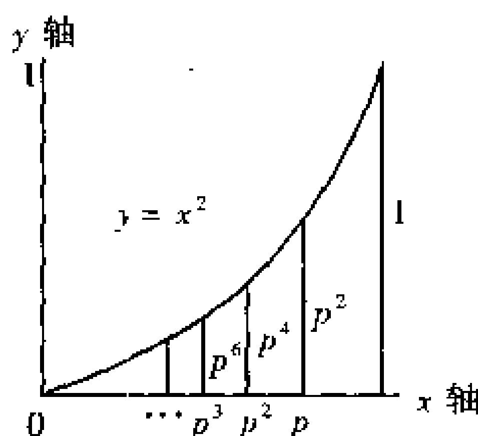


图 2

接着，他就计算曲线 $y = x^2$ 在这些点上方的高度。例如，若 $x = p$，则 $y = x^2 = p^2$。若 $x = p^2$，则 $y = x^2 = (p^2)^2 = p^4$。若 $x = p^3$，则 $y = (p^3)^2 = p^6$。图 2 标出了这些高度的一部分。

然后，他作一个矩形阶梯，其中每个矩形的高度等于该曲线在此矩形右边的高度，如图 3。（在这个矩形中，p 是 0.9。你可以试试 $p = 0.99$，并画出几个这种情形下的矩形。）

剩下的全部事情，就是求出这个阶梯的总面积，然后看当 p 越来越靠近 1 时，这个面积会怎么样。（p 越接近 1，矩形就越窄，这个阶梯就越像该曲线。）这是一个细心的簿记问题，即，求出每个矩形的面积，然后把所有那些面积合计在一起。

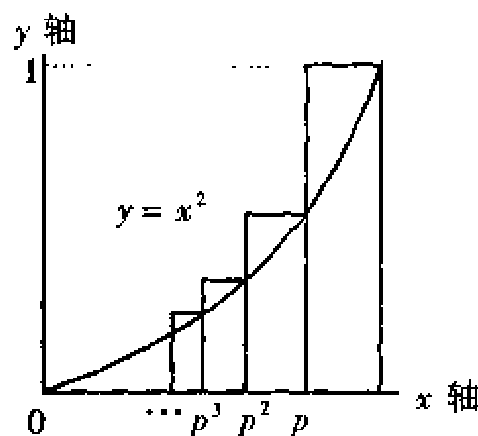


图 3

首先考察最大的矩形面积。它的高度是 1，宽度是 $1 - p$。所以它

的面积是

$$1\times(1-p)。$$

其次来看紧靠它左边的矩形。它的高度是 p^2，宽度是 $p-p^2$。所以它的面积是

$$p^2(p-p^2)=p^2p(1-p)=p^3(1-p)。$$

再其次，考察右边的第三个矩形。它的高度是 p^4，宽度是 p^2-p^3。它的面积是

$$p^4(p^2-p^3)=p^4p^2(1-p)=p^6(1-p)。$$

你可以验证，下一个矩形的面积是

$$p^9(1-p)。$$

每个矩形的面积，是 $1-p$ 和 p 的一个幂的乘积。我们沿着这个矩形阶梯每向左移动一次，这个幂的指数就增加3。所以，这个无穷阶梯的面积是

$$(1-p)+p^3(1-p)+p^6(1-p)+p^9(1-p)+\cdots。$$

因为每一项都出现 $1-p$，提出这个因子，我们得到

$$(1-p)(1+p^3+p^6+p^9+\cdots)。$$

出现在这个等式中的无穷和，是一个变形了的几何级数，其公比为 p^3。正如本章开头所提到的，其和为 $1/(1-p^3)$。所以，

$$\begin{aligned}\text{阶梯的面积}&=(1-p)(1+p^3+p^6+p^9+\cdots)\\&=(1-p)\times\frac{1}{1-p^3}。\end{aligned}$$

费马最后得到一个十分简短的阶梯面积公式：

$$\text{阶梯的面积}=\frac{1-p}{1-p^3}。$$

在这么多工作之后，我们得到这样一个简单的公式，多么令人满意啊！剩下来的全部事情就是找出，当 p 越来越靠近 1 时，

$$\frac{1-p}{1-p^3}$$

会发生什么情况。

在本章的开头，我们曾经提到，对任何自然数 k，

$$\frac{1-x}{1-x^{k+1}}=\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^k}。$$

它在 k 为 2，x 为 p 时的特殊情形，正好就是费马现在所需要的。他得到

$$\text{阶梯的面积}=\frac{1-p}{1-p^3}=\frac{1}{1+p+p^2}。$$

当 p 越来越靠近 1 时，这个阶梯的面积趋近于

$$\frac{1}{1+1+1^2}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}。$$

曲线之下的面积必为 1/3。

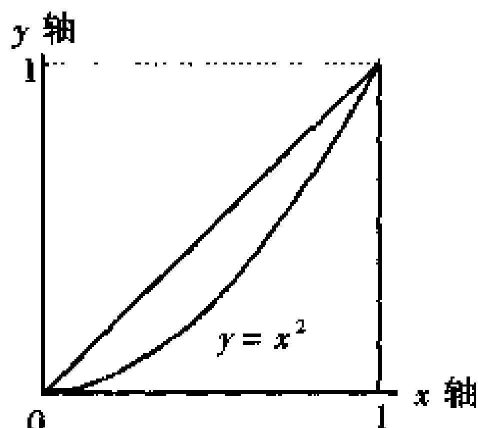


图 4

这个答案合理吗？粗略地看一下图 4 便知道是合理的。我们已经求出的这个曲线之下的面积，位于一个底和高都是 1 因而面积为 1/2 的三角形之内。这个曲线之下的面积恰好占有这个三角形面积的 2/3，因为 1/3 等于 2/3 × 1/2。

一个类似的方法适用于曲线 $y=x^3$。当你遵循这些步骤时，你会发现，你需要两项资料：

$$1+p^4+p^8+\cdots=\frac{1}{1-p^4}$$

和

$$\frac{1-p}{1-p^4}=\frac{1}{1+p+p^2+p^3}。$$

这两个都只不过是本章开头所收集的等式的特例。所以，当 p 趋近于 1 时，这个阶梯的面积趋近于

$$\frac{1}{1+1+1^2+1^3}=\frac{1}{1+1+1+1}=\frac{1}{4}。$$

我们结论，对于 0 与 1 之间的 x，曲线 $y=x^3$ 之下的面积是 1/4。如果你画出这条曲线，你会看到，当 x 在 0 与 1 之间时，它位于曲线 $y=x^2$ 之下。所以，可以预期，在它之下的面积，小于我们在 $y=x^2$ 情形下的答案 1/3。

同样的论证，一步跟着一步，适用于 $y=x^4$，$y=x^5$，$y=x^6$，…所有这些曲线。你可以验证，对任何自然数 k，曲线 $y=x^k$ 之下，从 0 到 1 这个区间之上的面积，是 1/（k+1）。

回顾费马的论证，发现它的简单性：用一个我们能够精确计算的面积，去逼近一曲线围成的面积，然后看当这些逼近越来越好时，它们会发生什么情况。

既然我们已经求出曲线 $y=x^2$ 之下的面积，我们就知道，当 n 增加时，我们在第二十九章遇到的商

$$\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

会发生什么情况。因为它趋近于那个面积，这个商一定趋近于 1/3。

一旦我们知道，当 n 增加时 $(1^2+2^2+\cdots+n^2)/n^3$ 趋近于

1/3，我们就可以自由地应用这一事实，而不必管它是怎么来的。例如，我们可以用它证明，半径为 r 的球的体积是 $4\pi r^3/3$。我将只是在半径为 1 的情形下概述这一推理过程，而把细节留给读者。

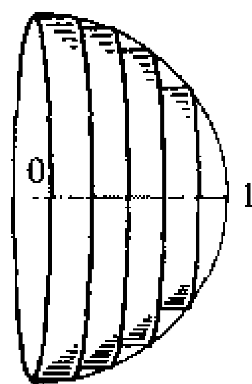


图 5

只考虑半球的体积。（这将简化计算。球的体积将是其两倍。）用一堆共 n 个“硬币”去逼近这个半球。为此，取一自然数 n，把垂直于半球底部的半径分成 n 段，每段长度为 1/n。然后将厚度为 1/n 的 n 个硬币如图 5 放置；图 5 显示的是 n = 5 的情形。（注意，最小的硬币半径为 0，所有这些硬币都在球的内部。）

计算这些硬币的总体积。（你会需要毕达哥拉斯定理，求出每个硬币的半径。）作为对你的计算的验证，这里是 n = 5 时的估计值：

$$\pi\left[\frac{1}{5}\right]\left\{\left[1-\left[\frac{1}{5}\right]^2\right]+\left[1-\left[\frac{2}{5}\right]^2\right]+\right.$$
$$\left.\left[1-\left[\frac{3}{5}\right]^2\right]+\left[1-\left[\frac{4}{5}\right]^2\right]+\left[1-\left[\frac{5}{5}\right]^2\right]\right\},$$

它等于

$$\pi\left[\frac{1}{5}\right]\left[5-\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5^2}\right]。$$

然后找出，当 n 增加时你的和会发生什么情况。同样的方法适合于 r 不必为 1 的一般情形。

一旦你知道了任何球的体积公式，求球面的面积就只是一

小步了。我将再次只在半径为1的情形下概述这一推理过程。

设想两个同心球，一个半径为1，一个半径为s，比1稍大一点。画出位于大球之内，小球之外的薄球壳图形。这个球壳的体积是

$$\frac{4\pi s^3}{3}-\frac{4\pi 1^3}{3},$$

它等于

$$\frac{4\pi\ (s^3-1)}{3}。$$

设内球的表面积为A。这个球壳的体积大致等于A乘球壳的厚度s－1。所以，该面积A近似等于商

$$\frac{4\pi\ (s^3-1)\ /3}{s-1}。$$

余下的全部事情就是要弄清楚，当s趋近于1时，这个商会怎么样。等式$s^3-1=(s-1)(s^2+s+1)$——它只不过是几何级数$1+s+s^2$之和的公式的变形——在这里会有用，因为它使我们能够摆脱分母中烦人的s－1。

利用$y=x^k$之下的面积，得知当n增加时

$$\frac{1^k+2^k\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

趋近于$1/(k+1)$。在下一章，你将需要这个资料。

当我们把这一章同前一章加以比较时，我们看到，在那一章试用的方法之所以失败，是因为我们没有一个简短的公式表达和数$1^k+2^k+3^k+\cdots n^k$。实际上，存在这样的公式，而且，当k小时，相应的公式可以努力找到。作为记录，这里是前四种情形，即k＝1，2，3，4时的公式：

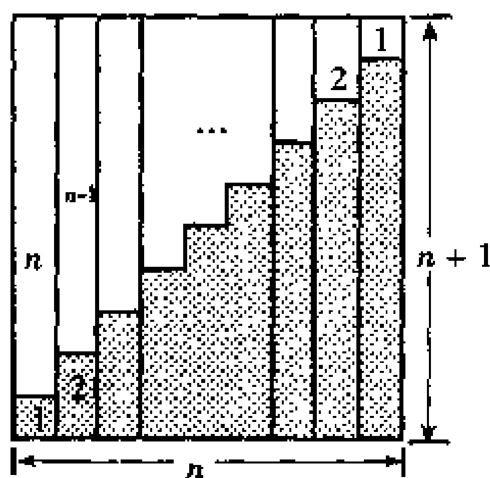
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$1^2+2+{}^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{5}-\frac{n}{30}。$$

右图展示一个边长为 n 和 n+1 的矩形，分成两个完全一样的阶梯，看着它你可以得到第一个公式。



每个阶梯的面积是 $1+2+3+\cdots+n$。因为矩形的面积是 $n(n+1)$，所以每个阶梯的面积是 $n(n+1)$ 的一半。这就告诉我们

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}。$$

由于 $n(n+1)=n^2+n$，我们便知第一个公式为什么成立。

阿基米德通过一个自然的方法发现了第二个公式。约在公元 1000 年前后，阿拉伯数学家发明了一个几何方法，一个接一个地获得了所有其他公式。

在本章和前一章中，我们从事求曲线之下的面积。在第二十八章，我们求曲线的斜率。这两个问题看来好像彼此无关。但结果是，如果你知道如何求曲线的斜率，你就能用这个信息

很容易地求出曲线之下的面积。这个令人惊奇的事实，构成微积分的核心。

如果你回头看求曲线斜率的第二十八章，再看求曲线之下的面积这一章，你会注意到，两者的方法是相似的。为求曲线的斜率，我们用割线或弦去逼近切线，然后查看，当这些割线或弦越来越接近切线时，它们的斜率如何变化。为求曲线之下的面积，我们用阶梯去逼近它，然后查看，当这些阶梯面积显得越来越像曲线之下的面积时，它们的面积如何变化。在两种情况下，我们都必须设计特殊的方法。

相反，微积分发展一些工具，帮助解决所有各种问题，特别是求曲线的斜率和曲线围成的面积。它大大减少了对每个问题设计一个新方法的需要。

任何一个学习过代数和三角的人，都有掌握微积分的基础。它是自然的下一步。或许这几章会诱导你去探索这一奇妙的创造。

微积分是对变量的研究。例如，把曲线 $y=x^2$ 想作一颗彗星的轨道。轨道上任意一点的切线，表明这颗彗星在该点的运动方向。如果引力突然消失，这颗彗星就会“飞速跑到切线上去”。

如果你知道一个运动物体在任一时刻的位置，微积分就能找出速度。反过来，如果你知道任一时刻的速度，微积分就能找出位置。更一般地说，如果你知道某个量变化多快，它就能找出一段时间的总改变量。反过来，如果你知道这个量在任一时刻是多少，它就会告诉你这个变量变化多快。这个量可以是湖中某一污染物量，可以是精炼汽油量，也可以是某一细菌种群的大

小。

微积分由牛顿和 G. W. 莱布尼兹（1646 – 1716）发明于 17 世纪，但它是 20 世纪许多科学技术的关键。正如历史学家阿诺德·汤因比（1889 – 1975）在他的自传体文学作品《经验》中所写的那样。

> 回顾以往，我深信，我本不该有选择的余地（无论是对学习希腊语或微积分）……对我来说，微积分本应是必修的。毕竟，每个人都应溶入他打算居留其中的世界的生活。我打算居留在西方世界……而微积分，就像张满风帆的航船，是……现代西方精神的特征标志之一。

第三十一章 圆和所有奇数

在数 π 和所有奇自然数之间，存在一个出人意料的联系：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$$

等式右边的加减，永无休止地进行。你使用的项数越多，你得到的和就越接近 π/4。这便提供一个计算 π 的方法，你想要多精确就多精确，甚至连圆都不用画。你所需要的全部，就是纸和笔，或一个计算器。当我第一次看到这个公式时，我感到惊奇，而且就在我熟悉它好多年之后，我仍然感到惊奇。使我惊异的是，不仅有这样一个公式，而且只不过是一些普通人发现了它，并证明它是对的。

在西方，J. 格雷戈里（1638 – 1675）于 1671 年，莱布尼

兹于 1673 年得到了它。但是，早在 1500 年，印度数学家就熟悉它了，而且我要在这里介绍的，正是印度人的论证。这个论证，比以往各章的论证要长，需要更加专心致志。或许，当你阅读时，你可能要对关键步骤作些注解，（以更大的比例）自己重新画图。

首先我们把前面各章介绍过而且我们这里要用的一些工具收集在一起。我们使用第十八章中的这一事实：如果 r 是一个介于 -1 和 1 之间的数，则

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+r^3+r^4+\cdots\cdots$$

如果我们以 $-s$ 代替 r，则得，当 s 介于 -1 和 1 之间时，

$$\frac{1}{1+s}=1-s+s^2-s^3+s^4\cdots\cdots,$$

它就是本章中我们需要的形式。（我们将只在 s 为正数时使用这个公式。）

我们需要第三十章中的这一事实：当 k 增加时，

$$\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\text{趋于}\frac{1}{k+1}\text{。}$$

此处，k 为一固定自然数。

实际上，我们是用一个与此密切相关的事实。分子中有 n 项。最后一项是 n^k。因为

$$\frac{n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{n},$$

而当 n 增加时 $1/n$ 趋于 0，所以我们可以删除分子中的 n^k，并作出结论，当 n 增加时，

$$\frac{1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k}{n^{k+1}}\text{趋于}\frac{1}{k+1}\text{。}$$

我们只是当 k 为偶数需要这一信息。例如，当 k 为 2 时，我们有 $\frac{1^2+2^2+\cdots\ (n-1)^2}{n^3}$趋于$\frac{1}{3}$。

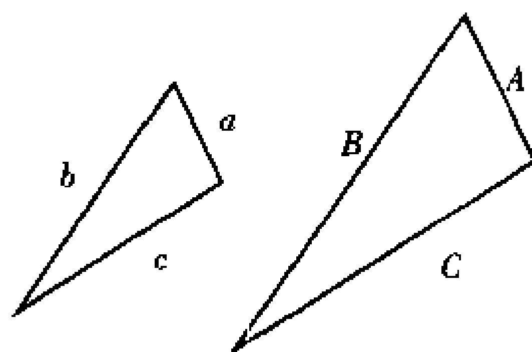


图 1

我们也将使用任何一个曾经把照片放大到广告上或把幻灯片放映到银幕上的人都熟悉的某些东西。即，所有长度按同一因子放大。特别，当一个三角形被放大后，大三角形和小三角形的三个角相同，而大三角形三边的长度与小三角形三边的长度成比例。在图 1 中，小三角形的边长是 a，b，c。大三角形的边长是 A，B，C。于是我们有

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}。$$

利用所有这些合适的工具——一个几何级数之和，一特定商式的行为，和放大的性质——我们便可证明，一个圆的周长和它的直径之比与所有奇自然数有关。这个推理比前面各章的推理要多一些步骤。但是，所有步骤都围绕一个思想：计算一个估计值。

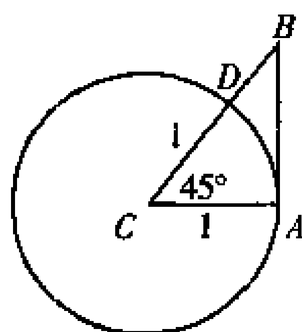


图 2

首先，画一个（大）圆，至少足以显示一个 45°角，如图 2。

这个圆的半径为 1。所以 AB 的长度是 1。这个圆的周长是 2π。因此，作为八分之一圆周的弧 AD 有长度

$$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}。$$

这样我们就有了以一个圆弧作为几何表示的 π/4。余下的全部事情，就是看那弧的长度为什么等于 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + …。

我们现在使用在前面几章已经为我们很好地服过务的一种方法。我们设计弧长 AD 的估计量，然后看当这些估计量越来越接近弧长时，它们是怎样变化的。

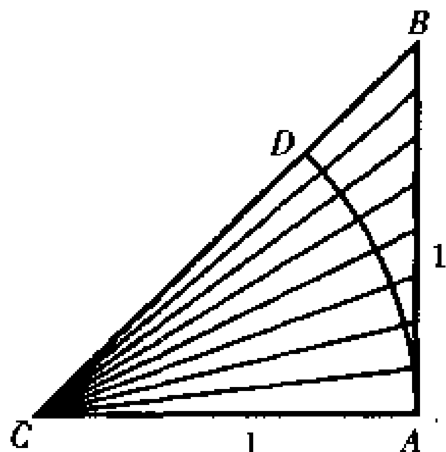


图 3

为了构成这样一些估计量，首先把线段 AB 分成长度相等的许多小段，如图 3。从圆心 C 到这些小线段的端点的射线把弧 AD 分成一些小弧。直线 AB 上所有小线段的长度相同，而小弧则不然。(靠近 A 的的小弧比靠近 D 的小弧要长。)

然后我们估计分割 AD 所得的那些小弧的长度。这些估计值之和是弧长 AD 的一个估计值，我们已知这弧长是 π/4。我们把线段分割成越多的小段，这个估计值应该越精确。然后我们证明，这些估计值也趋于 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - …。

现在转入细节。首先选定一自然数 n，把 AB 分割成长度相等的 n 段。因为 AB 的长度为 1，这 n 个小线段中的每一个长度都是 1/n，借助于从圆心出发的射线，AD 弧间接地被分割成 n 个小弧，但这些小弧并不都有相同的弧长。

让我们以 n = 5 的情形为例。这意味着，我们把 AB 分割成五个相等的线段，每一个长度为 1/5。这种情形的细节，表

明在一般情形下会是什么样。我建议你，以比你在这里看到的图更大得多的比例，自己作图。那样，你会更容易跟上每一步。（同样重要的是，它也会让你放慢到一个适当的步速。）

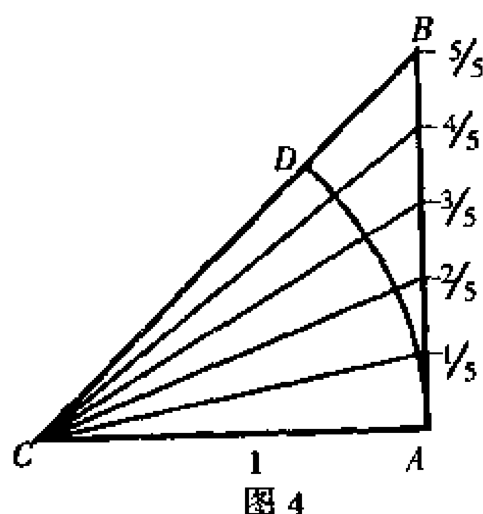


图 4

n = 5 时的景象如图 4 所示。

现在，让我们估计对应于 AB 上从 3/5 到 4/5 的那一段弧长，如图 5 所示，其中这一段弧标为 EF，而从 3/5 到 4/5 的那个线段标为 GH。

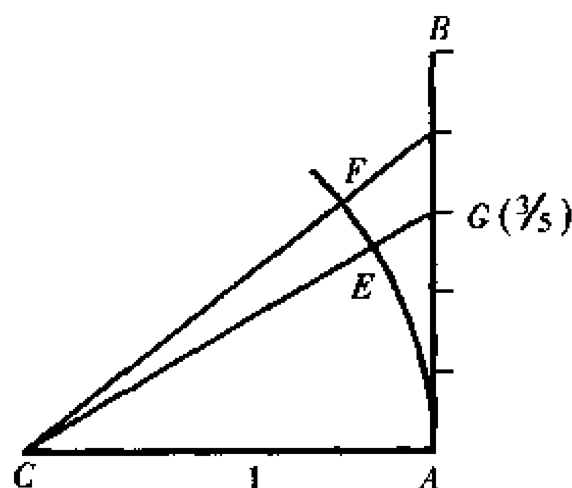
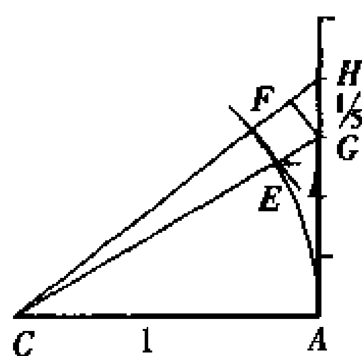


图 5

作该弧在 F 处的切线 FI。注意，它是垂直于 CH 的。FI 是弧 FE 的一个好的近似，特别当 GH 很小时更好。所以，我们的目标将是估计 FI。毕竟，对付一条直线比对付一个圆弧更为容易。



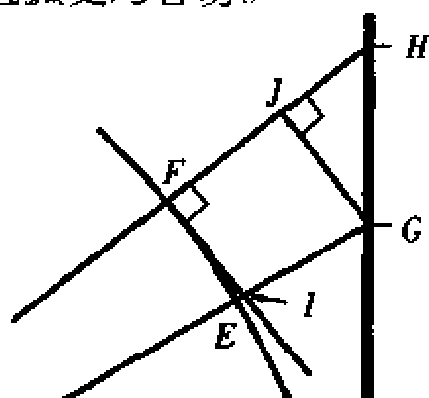


图 6

首先，作GJ垂直于CH，如图6所示。注意，它引出两个相似直角三角形，CFI与CJG。后面，我们要使用这个相似性。注意，直角三角形GJH与CAH也是相似的，因为它们在H处共有一角。利用这个相似性，我们得到

$$\frac{GJ}{AC}=\frac{GH}{CH}。\tag{1}$$

我们知道，等式（1）中的AC是1，GH是1/5。因此，

$$GJ=\frac{1/5}{CH}。\tag{2}$$

在我们寻求关于CH的公式之前，让我们利用另一对相似三角形，来获得一个涉及线段FI的等式，FI才是我们的主要兴趣所在。

按相似三角形CFI与CJG，我们有

$$\frac{FI}{GJ}=\frac{CF}{CJ}。\tag{3}$$

所以

$$FI=\frac{GJ\times CF}{CJ}\tag{4}$$

因为CF是1，关于FI的上述等式归结为

$$FI=\frac{GJ}{CJ}。\tag{5}$$

关于CJ我们能说什么呢？当n大，从而GH小时，JH也小。这就告诉我们，在CH/CJ接近于1的意义下，CH是CJ的一个好的近似。为了利用CH/CJ≈1这个事实，我们改写等式（5）为

$$FI=\frac{GJ}{CJ}\times\frac{CH}{CH}。\tag{6}$$

因为CH/CJ接近于1，我们有

$$FI \approx \frac{GJ}{CH}。 \tag{7}$$

等式（2）为我们提供了 GJ 的一个表达式，把它和等式（7）结合起来就导致

$$FI \approx \frac{(1/5)\ /CH}{CH} = \frac{1/5}{CH^2}。 \tag{8}$$

现在已经到了处理 CH 的时候。因为 CH 是直角三角形 CAH 的斜边，我们有

$$CH^2 = CA^2 + AH^2 = 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2。 \tag{9}$$

等式（8）与（9）相结合，提供关于 FI 的这一估计：

$$FI \approx \frac{1/5}{1 + (4/5)^2}。 \tag{10}$$

因为 FI 是弧长 FE 的一个估计值，最后我们得到估计

$$FE \approx \frac{1/5}{1 + (4/5)^2}。 \tag{11}$$

仔细查看等式（11），因为它揭示出在一般情形下会是什么样。分子$\frac{1}{5}$将被代之以 1/n。分母中的 4/5 将被代之以表示 AH 长度的一个分数。但是，让我们还是先把 n = 5 的情形作完。

当 AB 被分割为五段时，弧长 AD 的估计值，就是五个短弧的估计值之和。每一个估计值看起来都会像等式（11）中的估计。每一个的分子都是 1/5。每一个的分母都是不同的，从 $1 + (1/5)^2$ 直到 $1 + (5/5)^2$。累加起来，这就是弧长 AD 的估计值：

$$\frac{1/5}{1+(1/5)^2}+\frac{1/5}{1+(2/5)^2}+\frac{1/5}{1+(3/5)^2}+\frac{1/5}{1+(4/5)^2}+\frac{1/5}{1+(5/5)^2}。\quad(12)$$

和数（12）是弧长AD的一个估计值，而弧长AD我们知道是π/4。（完全出于好奇，让我们看看这个估计值和π/4有多接近。取四位小数，这个和是0.7337，而π/4是0.7854。考虑到我们只用了五个线段，且在计算过程中作了一些近似，这个结果不算太坏。）

和数（12）的形式提示，在n代替5的一般情形下，这个和会是什么样子。被加项数会是n而不是五。在每一个被加项中，分子将是1/n而不是1/5。分母将从$1+(1/n)^2$开始，逐渐上升到$1+(n/n)^2$。例如，当n为6时，弧长AD的估计值是和数

$$\frac{1/6}{1+(1/6)^2}+\frac{1/6}{1+(2/6)^2}+\frac{1/6}{1+(3/6)^2}+\frac{1/6}{1+(4/6)^2}+\frac{1/6}{1+(5/6)^2}+\frac{1/6}{1+(6/6)^2}。\quad(13)$$

取四位小数，该和是0.7426，π/4的更好一点儿的估计值。

但是，我们真正有兴趣是，当被加项数n增加时，类似于（12）和（13）的估计式会发生什么变化。包括n个被加项的一般估计具有形式

$$\frac{1/n}{1+(1/n)^2}+\frac{1/n}{1+(2/n)^2}+\cdots\cdots+\frac{1/n}{1+((n-1)/n)^2}+\frac{1/n}{1+(n/n)^2}。\quad(14)$$

在和数（14）中，我们只是写出了前面两项和最后两项．介于它们之间的六个圆点表示所有其他各项——这个和的大部分．

当 n 变得越来越大时，和（14）会发生什么情况呢？为了找出这个奥秘，我们使用本章开头所提到的一些工具。

首先，让我们提出（14）中每个分子都有的因子 1/n，改写（14）为

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1/n}{1+(1/n)^2}+\frac{1/n}{1+(2/n)^2}+\cdots+\frac{1/n}{1+((n-1)/n)^2}+\frac{1/n}{1+(n/n)^2}\right]。\qquad(15)$$

让我们来处理括号中的和。

回忆，若 s 是一个小于 1 的正数，则

$$\frac{1}{1+s}\longrightarrow 1-s+s^2-s^3+s^4-\cdots。$$

我们可以把这公式应用于括号中的每一被加项，只有最后一项除外（因为 n/n 不小于 1)。在第一项中，s 是 $(1/n)^2$；在第二项中，它是 $(2/n)^2$。在倒数第二项中，它是 $((n-1)/n)^2$。这最后一项 $1/(1+(n/n)^2)$ 等于 $1/(1+1^2)$，即 1/2。但在估计式（15）中，它被乘以 1/n，因此，它对整个估计式的贡献只是 1/(2n)。当 n 增加时，这个贡献趋向于 0，因此我们干脆删去和数中的这一部分。

于是我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+(1/n)^2}&=1-\left[\frac{1}{n}\right]^2+\left[\frac{1}{n}\right]^4-\left[\frac{1}{n}\right]^6+\cdots\\ \frac{1}{1+(2/n)^2}&=1-\left[\frac{2}{n}\right]^2+\left[\frac{2}{n}\right]^4-\left[\frac{2}{n}\right]^6+\cdots\\ &\vdots\end{aligned}\qquad(16)$$

$$\frac{1}{1+((n-1)/n)^2}=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n-1}{n}\right)^4-\left(\frac{n-1}{n}\right)^6+\cdots$$

注意，每个等式的右边，+和-是交错的。

我们把这 n-1 个等式累加起来，先加1，因为右边的第一项都是1。这些1的和是 n-1。

其次，让我们累加（16）右边的第二项。它们加在一起是

$$-\left(\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{2}{n}\right)^2-\cdots-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2。$$

我们提出所有分母中的因子 n^2，改写这和为

$$-\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}。$$

类似地，（16）右边第三项加在一起是

$$\frac{1^4+2^4+\cdots+(n-1)^4}{n^4};$$

（16）右边的其他各项导致类似的公式。

利用这些资料，我们来改写（15）。把出现在（15）前边的因子 1/n 放回到每个被加项，我们看到，（15）等于

$$\frac{n-1}{n}-\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}+\frac{1^4+2^4+\cdots+(n-1)^4}{n^5}-\cdots。\quad(17)$$

余下的全部事情，就是找出，当 n 增加时，（17）中的每个被加项会怎么样。

这个和的第一项是

$$\frac{n-1}{n},$$

两个相邻自然数之比。例如，当 n 为 100 时，这个比是 99/100，即 0.99。当 n 增加时，比（n-1）/n 趋近于 1。

这个和的第二项是

$$-\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}。$$

按照本章开头我们回忆到的那些工具，当 n 增加时，这个表达式趋于 - 1/3。类似地，（17）中的第三项趋于 1/5。（17）中没有写出的第四项趋于 - 1/7。总和起来，当 n 变得越来越大时，表达式（17）趋于

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots。$$

回想这些和也趋于长为 π/4 的一个弧，我们得到

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots。\qquad(18)$$

为看 π 由所有正奇整数表出，我们以 4 乘上式，得到

$$\pi=4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right]。$$

我们对这个等式的论证，初读起来，似乎有点复杂。但是，如果你反复检查几次，它就会变得越来越简单，因为指导它的就是一个思想：作出一个一般估计式，然后看它如何变化。技巧之一是，用从上到下按列累加的办法，去求一串以行的形式从左到右给出的和。数学家们经常使用这种技巧。

建立（18）有许多其他方法。例如，学生们在开始学微积分时，将会通过以两种不同的方式去看曲线 $1/(1+x^2)$ 之下，从 0 到 1 这个区间之上的面积，得到这一公式。在将 $1/(1+x^2)$ 表示成为一个几何级数之后，他们会应用积分学的知识。他们的计算将只需要几行。

第三十二章 一个分隔的思想

迄今为止，我一直实行克制，让数学的真理与美妙自已说话。我决不想告诉读者某个发现或证明是美妙的。发现本身说明数学的真理是绝对肯定与永恒的，永远不会被机智的辩术所驳倒，也不会被变化着的时尚贬值。

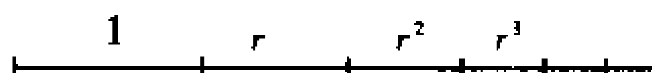
现在，在我即将结束本书的时候，我要介绍一个证明，我公开宣称它是美妙的。

回想在第十八章中我们曾经证明，对介于 -1 和 1 之间的任一数 r，$1+r+r^2+r^3+r^4+\cdots=1/(1-r)$。对此我们给出了两个不同的论证。在其中的一个论证里，我们在数直线上画出对应于 1，r，r^2，r^3，r^4，……的点，然后看介于相邻两点之间的小线段的长度。在另一个论证里，我们只是注意到，在一个特定的和中，正项与负项互相抵消。由于几何级数之和，甚至还有前面一段之和 $1+r+r^2+\cdots+r^k$ 的重要性，值得有一个更美妙的几何的证明。它肯定是重要的，因为我们用它，在第十九章分析银行业务，在第二十七章确定当 x 靠近 1 时 $(x^3-1)/(x-1)$ 如何变化，在第二十八章中求曲线的斜率，在第三十章中计算曲线之下的面积，以及在第三十一章中得出一个 π 的公式。

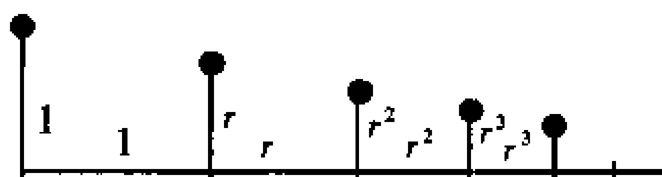
我不知道是谁发明了这个证明，它适用于 r 为正数时。(若 r 为负数，则令 $r=-s$，s 即为正数。于是，$1+r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+\cdots\cdots$ 等于 $1-s+s^2+s^3+s^4-s^5+s^6-\cdots\cdots$，它又等于 $(1+s^2+s^4+s^6\cdots\cdots)-s(1+s^2+s^4+\cdots\cdots)$。括号中的几

何级数之和为 $1/(1-s^2$。）我猜想是一位数学家在观察别的什么时偶然发现了它，但我不确切知道此事。无论如何，它是数学“民间文学”的一部分，而且它十分简短。

首先，沿着一条直线按下图放置长度为 1，r，r^2，r^3，r^4，……的线段：

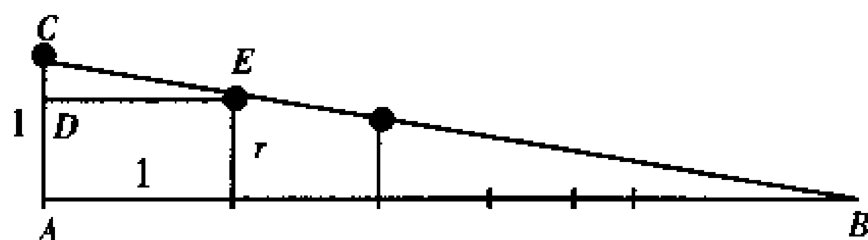


然后在每一段的左端，画一根与此段等长的垂直标杆，得到如下图形。



我们几乎就要完事了。像灯杆顶端的灯泡一样放置的圆点，位于一条直线上。（为了对此进行验证，只须计算连接相邻两圆点的每条线段的斜率。你会看到，这些斜率全都相同。）

其次，我们画出所有圆点位于其上的直线，如下图所示。



我们已经看到，所有 r 的幂之和不会变得任意大，因为这个和正好是线段 AB 的长度。剩下的全部事情，就是找出那个长度。

按相似三角形 CAB 与 CDE，我们有

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DC}。$$

粗略地看一下图便知 DE = 1，AC = 1，DC = 1 − r。因此

$$\frac{AB}{1}=\frac{1}{1-r},$$

所以

$$AB=\frac{1}{1-r}。$$

我们得出结论

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}。$$

你可能不满，“是的，它是比较干净利索，但是，有限项之和会怎样呢？例如，$1+r+r^2$ 这个和？”你可以验证，一个与 ABC 相似的小三角形会表明，这个和等于 $(1-r^3)/(1-r)$。

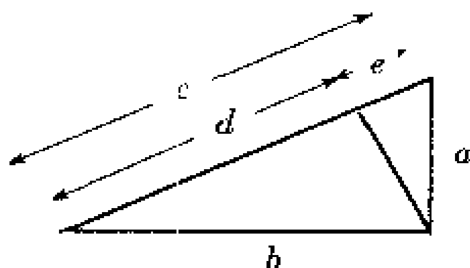
可能并非每个人都会赞成我的观点，因为美妙是一个感受问题，但我认为这第三个证明的确是美妙的：它形象化，它简明，它一旦被人注意，似乎就像一首莫扎特的交响曲那样令人难舍难忘，似乎在混沌初开之际，它就在天上等着什么人把它带到地球上来。如果上帝保存着一本记录证明的书，我想准会在它的某些页中找到这个证明。

注意，在这个证明中，几何诠释代数。在讨论斜率和曲线下的面积那几章中，代数诠释几何。这在数学中是典型的，似乎彼此无关的领域，常常以令人既惊奇又高兴的方式相联系。

在刚刚利用相似三角形求完一个几何级数之和之后，我忍不住要指出，如何利用它们来获得毕达哥拉斯定理的一个与第

二十二章中不同的证明。这是我觉得极好的另一个证明。它是这样进行的。

考虑一个边长为 a，b，c 的直角三角形，其中 a 小于或等于 b。从直角的顶点作垂直于斜边的直线。这条直线把大三角形分成两个小三角形，把斜边分成长度为 d 和 e 的两个线段，其中 d + e = c，如右图所示。



虽然这个大三角形和这两个小三角形大小不同，但你可以验证，它们有相同的角。所以，它们是相似的。这是证明的关键。

因为以 a 为斜边的直角三角形与以 c 为斜边的直角三角形相似，我们有

$$\frac{e}{a}=\frac{a}{c}。$$

这个等式的左边是这两个三角形的最小边；右边是斜边。

以 ac 乘这个等式的两边，我们得到

$$ce = a^2。$$

利用斜边为 b 的三角形和斜边为 c 的三角形，同样的推理给予我们

$$cd = b^2。$$

等式 $ce = a^2$ 和 $cd = b^2$ 加在一起，告诉我们

$$cd + ce = a^2 + b^2。$$

根据加法和乘法之间的重要联系，即分配律，我们有 $cd + ce = c\ (d + e)$。因此

$$c(d+e)=a^2+b^2。$$

回忆 $d+e=c$，我们便得到了毕达哥拉斯定理：

$$c^2=a^2+b^2。$$

关于这个证明，有两点使我喜欢。第一，它只用三角形内的对象——不用三角形之外的三个正方形。第二，它只用直线的长度而不用面积。（面积是一个比长度复杂得多的概念。）另一方面，几何学家可能抱怨，“这里面代数太多。我更喜欢第二十二章中使用三个正方形的证明，因为它完全是形象化的。”

这只是表明感受在数学中起作用，就像在音乐和艺术中一样。即使每个人都赞成两种不同的证明同样正确，但对一个证明是否比另一个更为美妙，仍有充分的余地进行正常的争辩。

随着这一小章的迂回跋涉，我们来到了旅程的终点。在这本书中，我们领略了数学的某些永恒真理和美妙，见到了令人惊奇的发现，并弄清了导致这些发现的每一步逻辑。但是，数学并不只是一个自给自足的另外的世界。日常生活和工商业领域大量使用它的语言与方法。

在进入这个王国的道路上我们还只走了一小段路；这是一个充满无数美妙定理和挑战性奥秘的王国。它给每个愿意对它进行——不论是实际的还是理论的——探索的人以获得无限欢欣的指望，这是人生能包含的任何欢欣都无法比拟的。

关于进一步阅读的建议

当我在一个电台谈话节目作嘉宾时，一位听众打进电话征求建议："我想了解更多的数学。你能建议我读些什么吗？"这是一个我从未考虑的问题。我没有给予满意答复的原因之一是，这样的建议须依这位听众现已达到的数学水平而定。现在是当时就该给予的回答，虽然迟了一些，但或许对别人有用。

如果你想学习算术的基本概念，你可到书店浏览一遍供人们准备参加入学考试的许多平装书。这里列举几本为例：

Carman, R., and M. Carman. *Quick Arithmetic: A Self-Teachig Guide*, 2d ed. New York: John Wiley & Sons, 1984。

Goozner, C., *Business Mathematics the Easy Way*, 2d. ed. Hauppauge, NY: Barron's Educational Series, 1991.

Sia A., et al. *Entry Level Math*. Piscataway, NJ: Research and Eduction Association, 1983.

Slavin, S. *All the Math You'll Ever need*. New York: John Wiley & Sons, 1989.

某些这类书中包含一些代数与几何。令人赞叹的是，没用多少页就介绍了重要的概念与方法。

如果你很好地掌握了算术，特别是分数，想要学习代数，你可去看 Haym Kruglak and J. T. Moore, *Basic Mathematics with*

Applications（New York：Schaum's Outline Series，McGraw – Hill，1973）。前十章包含算术与代数，而其余各章讨论三角学和微积分所需要的其他论题。关于三角学的第十三和十六章只用了27页，但介绍了最基本的材料。P. Selby and S. Slavin，*Practical Algebra*；*A Self-Teaching Guide*，2nd ed.（New York：John Wiley & Sons，1991）这本书包含基本代数，而且包括许多自我测试。

如果你在早些时候学过代数，想要复习，可以试试 P. Selby and S. Slavin，*Quick Algebra Review*：*A Self-Teaching Guide*（New York：John Wiley & Sons，1993）.

S. Slavin，*Quick Business* Math（New York：John Wiley & Sons，1995）一开始讲代数和百分比的基本知识，然后把它们应用于零售业，单利和复利，折旧，以及统计。

如果你懂得代数，想要准备学微积分，你不妨看看 J. Stewart，L. Redlin and S. Watson，*Mathematics for Calculus*（Pacific Grove，CA：Brooks Cole 1992），或 D. Cohen，*Precalculas*，4th ed.（Minneapolis：West，1993）。

不管怎样，只要你牢固地掌握了代数、几何与三角学，你就可以开始学微积分。我同 D. 查克里安和 C. 克拉比尔合写的辅导咨询系列中的三本书，包括代数、几何与三角学。虽然是为小组学习而写，但它们甚至对于单独研习，例如实行家庭学习计划的人们，也是有效的。它们的出版地是，Sunburst，101 Castleton Street，Pleasantville，New York，10570 – 3498（800 – 338 – 3457）。

你可以从许多微积分书中进行选择。我和安东尼·巴士洛

斯合写，由 McGraw - Hill，New York 出版的 *Calculus and Analytic Geometry* 第五版，我认为适合于自学。其中包括一小节必要的三角学。你经常可以在旧书店找到不太贵的该书早期版本或其他微积分书。

如果你想寻找使孩子对数学产生兴趣的方法，可以查阅 L. Polonsky, et al, *Math for the Very Young: A Handbook for Parents and Teachers*（New York: John Wiley & Sons，1995）。其中介绍了许多方法，利用家庭周围，动物园等地熟悉的物体和活动，引导儿童（甚至包括学龄前儿童）接触各种各样数学概念。

为鼓励女孩学习数学和自然科学，你可找一本 M. Parker, ed., She Does Math-Real-Life Problems from Women on the Job (Washington DC: Mathematical Association of America，1995)。书中谈到的问题，是现实生活中遇到的问题的典型实例，只用到中学数学。该书评价了 38 位职业妇女的经历和她们研讨的某些问题。

如果你想尝试其他类型的数学，可以看看下列各书中的任何一本：

Beckmann, P. *A History of Pi*. New York: St. Martin's Press, 1971.

Courant, R., and H. Robbins, *What Is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1960.

Dunham, W. *Journey through Genius*. New York: John Wiley & Sons, 1990. 该书介绍 12 个定理，而将其证明置于个人和历史的背景。

—— The Mathematical Universe. New York: John Wiley & Sons, 1994.

Huff, D. *How to Lie With Statistics*. New York: Norton, 1993. 只有很少一点数学基础的读者也可看懂这部杰作。

Maor, E. *e: The Story of a Number*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.

Paulos, J. *Innumeracy, Mathematical Illiteracy and Its Consequences*. New York: Vintage Books, 1986. 该书探讨各种各样问题的计算，例如，灵学，股票市场，巧合，伪科学，药品检验等等。

Steen L., ed. *Mathematics Today*. New York: Springer-Verlag, 1978. 十二篇不拘俗套的随笔。

——, ed, *For all Practical Purposes*. New York: W. H. Freeman, 1988.

Stein. S. *Mathematics: The Man-made Universe*, 3d ed. New York: McGraw Hill, 1976.

关于数学史有

Boyer, C. B, and U. C. Merzdach. *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1991.

Edwards, C. H, Jr. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer－Verlag, 1979.

Eves, H. W. *An Introduction to the History of Mathematics with Cultural Connections*. Philadelphia: W. B. Saunders, 1990.

Kline, M. *Mathematics in Western Culture*. New York: Oxford University Press. 1953.

——, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.

关于传记有

Albers, D. J, and G. L. Alexanderson. *Mathematical People: Profiles and Interviews*. Boston: Birkhäuser, 1985.

Bell, E. T. *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1935.

这些只是许多合用书本中的几本。至于一个更为广泛得多的目录，可以查阅 L. Steen, ed, *Library Recommendations for Undergraduate Mathematics* (1529 18th Street, NW, Washington, DC 20036: Mathematical Association of America, 1992).